ポストモダン解析学

ユルゲン・ヨスト

〔訳〕…小谷元子

Jürgen Jost Postmodern Analysis



Springer

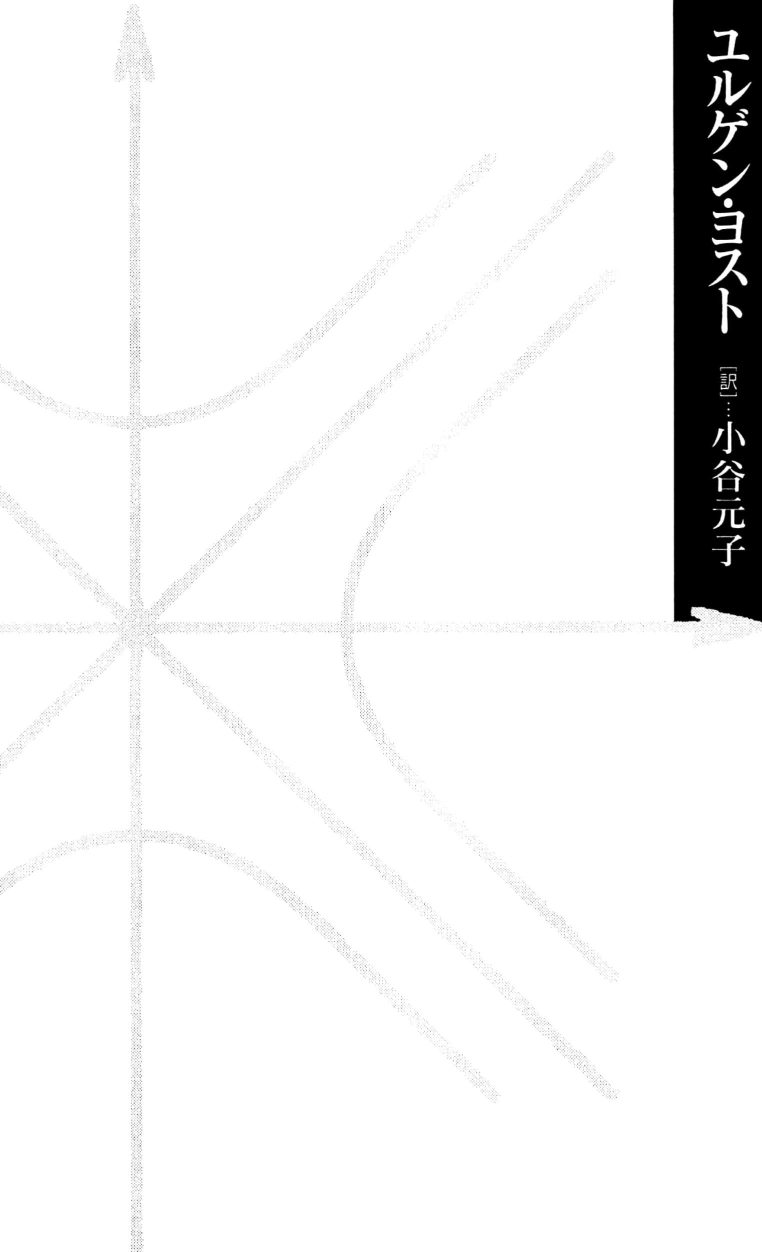
シュプリンガー・フェアラーク東京

ポストモダン解析学

Jürgen Jost Postmodern Analysis

ユルゲン・ヨスト

[訳]…小谷元子



Springer

シュプリンガー・フェアラーク東京

エベルハルト・ツァイトラー (Eberhard Zeidler) に
情熱と熟達した手腕を持って
我が研究所[1] を設立したことに対して

[1] 訳注 : Max Planck Institut für Mathematik in der Naturwissenschaften

Translation from the English language edition:
***Postmodern Analysis* by Jürgen Jost**

序

この本のタイトルはいったいどういう意味なのだろう？「ポストモダン」という言葉で何を伝えようとしているのだろう？本を手にとった読者は，このような疑問を感じたに違いない．その問いには，提唱者達が「モダンな」と呼んだ解析と比較して，この本での解析の扱いがどのように異なっているのかを説明して答えにしよう．

ブルバキ(Bourbaki)グループの仕事，もしくはデュドンネ(Jean Dieudonné)の教科書に代表される「モダンな解析」の特徴は系統的，公理的な取り扱いと高度な抽象化の追求にある．それ以前の解析の多くは，特殊な問題を解くためのテクニックを，どちらかというと関連性なく寄せ集めようという傾向にあった．そのことを考えると「モダン」な解析は極めて健全であると言えよう．

いかなる場合にも，まとまりのある強力な数学の理論を展開するには，ある程度の期間は，科学の他分野のみならず，数学の他分野の研究との関連すらを忘れ，内在する問題と構造だけに集中する必要があるように思える．優れた数学の理論だけが備えている知的な優雅さと完璧さのレベルに到達するためには，ほぼ完全に他から孤立することが要請されるのかもしれない．しかしいったんこのレベルに達した後に，再び外的で具体的な問題からのインスピレーションに対して眼を開いてみることも有益であろう．

ヒルベルトによって始められ，ブルバキグループに引き継がれ完成された公理的アプローチは，今世紀における最も重要な貢献を数学にもたらした．特に代数幾何においては顕著である．この方向への発展が，多くの数学の分野で役立ったことは確かであるが，代数幾何以外の分野で同じ程度に有益であったとは言えない．幾何においては視覚的な想像力という強力な道具を軽視し，曲率に関連した大域的で非線形な問題に必ずしも十分に取り組むことはできなかった．

解析においても同様に，線形な問題のみに力点がおかれ，真の非線形問題は，体系的で包括的な理論の対象とするにはあまりに多様であると思われてきた．その結果は偏微分方程式の分野において特に顕著である．偏微分方程

式の分野は，数学以外の科学との最も活発で刺激的な相互作用を体験してきたが，科学に現れる方程式は，一般に自己相互作用，外部からの影響などのために，真の非線形問題となるのが普通である．

このように，近代的な数学は内在する問題と構造に焦点をしぼることにより，大いなる発展をしてきたわけであるが，他の科学との密接な相互影響のもたらす刺激を，少しばかり失ってきたのではないだろうか？ 最近になって，この流れに揺り返しが起こり，ある数学の分野と数理物理の間に非常に強い結びつきが生まれてきている．また，数学の研究においても，一般論よりは個々の取り扱いを要する具体的な問題に力点をおく方向に移ってきている．

そこで，私は「モダンな」解析の達成した理論体系を保ちながら，同時にその限界も明らかにするような上級者向け解析学の入門書があっても良いのではないかと思った．

長年，芸術や科学において「モダンな」といえば,「新しい」,「古いものとは異なる」，ときには「革命的である」といった意味合いで使われ，常にある流派から，その継承者へと変遷しているものというのと同義語であった．したがって，芸術の一様式や科学におけるパラダイムを確立するに至っていないものを「モダン」と呼んできた．今世紀になって，この傾向は変化した．建築や他の芸術の分野で，抽象的な機能化が極度に推し進められるようになると，この方向には新しい理論や発展をそれ以上進めることができなくなり，数歩後退し「プレモダン(モダン以前)」の理論を再考しなくてはならなくなった．そして,「モダン」という言葉にも，ある特定の様式が結び付けられ，その結果，次の世代のものは「ポストモダン」と呼ばざるをえなくなった．先に述べたように，数学においても，ある意味で同じような状況が起こったのであるから，モダンな理論体系の識見を基におき，しかしちょっとした行き過ぎを修正しようという望みを抱きながらの試みを「ポストモダン」と呼ぶのは論理的であろう．

もちろん，現在「ポストモダン」という言葉は全面的に良い意味にのみ使われるわけではない．この言葉には恣意的な，行き当たりばったりの様式の寄せ集めという含みがいくらかはあるのだから．しかしながら，この本のタイトルはそういう意味で付けられたのではないということを請け合いたい．むしろ上級者向き解析を首尾一貫した形で，抽象化のための抽象化を避け，偏微分方程式，変分法，関数解析，その他諸々の解析の基礎となる事柄を，科学における解析的な問題への応用とともに，とりわけ非線形的要素を含んでいるものを中心に紹介したいと思っている．

微積分がすべての解析の基本であることはいうまでもないが，今世紀に発展した解析学において，重要な理論が3つあると思われることを，ここで強調したい．つまりバナッハ空間，ルベーグ積分，そして抽象的な微分多様体の概念である．この3つのうち，最初の2つは本書で扱うが，著者の専門分野に最も近い3つ目については別の本を待たねばならない．（実をいうと「待たねば」というのは正確ではない．著者はすでにこの題材を，より上級者向けのいくつかの本で扱っており，特に1995年シュプリンガーから出ている“Riemannian Geometry and Geometric Analysis”に詳しい．）

ルベーグ積分論がバナッハ空間の概念と併わさると，より力を発揮することは，L^p 空間やソボレフ空間を学ぶとよくわかる．これらの空間は偏微分方程式論や，変分法の基本的な道具である．（事実，これが，それ以前のリーマン積分よりルベーグ積分が決定的に優れている点で，ヒルベルト空間やバナッハ空間，つまり L^p 空間やソボレフ空間などの完備ノルム空間としての関数空間の構成を可能にした．）これが本書で読者に紹介したい主題である．

この本の構成は教育的な配慮に基づいている．結局のところ，本書は私がボッフム大学で専門的な数学教育の最初の学年の学生に対して行った講義を基にしているのだから．準備として，実数の性質について必要事項を一通り述べた後，一変数の連続関数と微分法で本書は始まる．連続関数や微分可能関数の列の収束の問題を考えることで，バナッハ空間を考える動機を与え，次に距離空間の概念を展開し，特にコンパクト性に注目する．一次元の理論を学んだ後には，読者はより一般的なバナッハ空間での微分に対面する準備ができるであろう．少しばかり抽象的な議論が続くが，その後，再びユークリッド空間における微分を用いて具体的な話題を取り扱う．陰関数定理，常微分方程式(ODE)の解の存在と一意性に関するピカール・リンデレーフの定理をバナッハの不動点定理より導く．

後半部ではユークリッド空間におけるルベーグ積分論を展開する．その後，すでに述べたように L^p 空間，ソボレフ空間を導入し，楕円型偏微分方程式(PDE)と変分法を紹介する．その流れの中で，物理から生じたいくつかの例を見る．

目次の中に，各章の中心となる概念と結果を述べておいたので，興味を持たれたのであれば，目次の項を見ていただければ本書の内容について，より詳しい情報が得られる．

本書は解析の中級コースである．したがってドイツの大学の典型的な入門書より，少々高度な内容になっている．しかしながら特に最初の方で扱う内容

は入門コースでの必修事項にならって項目を選んだ．ドイツの入門的な解析の教科書 O. Forster (Analysis I,II, Vieweg, 1976ff), H. Heuser (Analysis I,II, Teubner, 1980ff) を参考にした．J. Dieudonné の Modern Analysis, Academic Press, 1960ff[1] と重なところがあるが，本書の内容やスタイルはより教育的配慮を重んじている．全般的に見れば本書とは異なるところは多いとはいえ，Modern Analysis の非の打ちどころのないエレガントな論証を見るにつけ，時として J. Dieudonné の議論を取り入れざるを得なかった．「モダンな」数学の達成した理論体系は保つというのが，私の原則なのだから．

ソボレフ空間の取り扱いと楕円型偏微分方程式の解の正則性に関しては D. Gilbarg-N. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equationsof Second Ordeer, Springer, [2]1983 を用いたが，本書の方がより初等的になっている．

原稿をチェックし，訂正や改良，校正にあたって，Felicia Bernatzki, Christian Gawron, Lutz Habermann, Xiaowei Peng, Monika Reimpell, Wilderich Tuschmann, and Tilmann Wurzbacher の有能かつ献身的な助けを得た．ドイツ語の原稿を英語に訳してくれたのは Hassan Azad である．原稿のタイプと数度にわたる書き直しは Isolde Gottschlich の熟練と忍耐の賜物である．図表は Harald Wenk, Ralf Muno の助けを得て，Micaela Krieger によって作成された．全員に感謝をささげたい．彼らの協力なしには本書は完成しなかったであろう．

第2版にあたっての前書き

第2版を出すに当たって，常微分方程式の階の定性的ふるまい，L^p 関数，ソボレフ関数に関するより詳しい内容，1の分割，および抽象的測度論の簡単な導入部を付け加えた[2]．また，この機会を利用して，第1版のミスプリントと2箇所の誤りを正した．関連するコメントをくれた Horst Lange, C. G. Simader, Matthias Stark に感謝する．また，TEX 原稿を作成してくれた Antje Vandenberg にも感謝する．

ライプチッヒ，2002年5月，　　　　ユルゲン・ヨスト

[1] *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.

[2] 第2版で追加・修正された箇所について詳しくは 418 ページ参照.

目　次

第 I 部　一変数の微積分

第0章　準備　*3*

◆実数の性質
◆実数列の収束と極限
◆指数関数と対数関数

第1章　関数の極限と連続性　*15*

◆連続性，一様連続性の定義
◆連続関数の性質
◆中間値の定理
◆ヘルダー連続性とリプシッツ連続性

第2章　微分可能性　*25*

◆微分可能性の定義
◆微分の基本公式
◆微分可能関数の連続性
◆高階微分

第3章　微分可能関数の性質，微分方程式　*37*

◆微分を用いた極値の特徴付け
◆平均値の定理
◆微分方程式 $f' = \gamma f$
◆微分方程式の解の一意性
◆２階微分による極大値，極小値の特徴付け
◆テイラー展開

第4章　バナッハの不動点定理．バナッハ空間の概念　*51*

◆バナッハの不動点定理
◆ノルムの定義
◆距離
◆コーシー列
◆完備性

第5章　一様収束　55

◆関数列の収束
◆ベキ級数
◆収束定理
◆一様収束列
◆関数空間のノルム
◆一様有界かつ同等連続な関数列に関するアルツェラ・アスコリの定理

第6章　積分と常微分方程式　73

◆原始関数
◆リーマン積分
◆積分の基本公式
◆部分積分
◆置換積分
◆平均値の定理
◆積分と面積
◆ ODE
◆ ODE の局所解の存在と一意性に関するピカール・リンデレーフの定理

第 II 部　位相空間論の概念

第7章　距離空間：連続性, 位相空間論の基本的概念, コンパクト集合　91

◆距離空間の定義
◆開集合
◆閉集合
◆凸集合
◆連結集合
◆コンパクト集合
◆点列コンパクト性
◆距離空間の連続写像
◆有界線形作用素
◆$\mathbb{R}^d$ のノルムの同値性
◆位相空間の定義

第 III 部　ユークリッド空間, バナッハ空間における微積分

第8章　バナッハ空間における微分　121

◆バナッハ空間の写像の微分可能性の定義
◆微分の基本公式
◆高階微分
◆テイラー展開

第9章　$\mathbb{R}^d$ における微積分　135

A　スカラー値関数　*135*

◆勾配
◆偏微分
◆ヘッセ行列
◆極値
◆ラプラス作用素
◆偏微分方程式

B　ベクトル値関数　*149*

◆ヤコビ行列
◆ベクトル場
◆発散
◆回転

第10章 陰関数定理とその応用 155

◆陰関数定理 ◆逆関数定理
◆条件付極値 ◆ラグランジュの未定係数法

第11章 $\mathbb{R}^d$ の曲線. 常微分方程式系 169

◆正則曲線と特異曲線 ◆長さ
◆求長可能性 ◆弧
◆ジョルダン弧の定理 ◆高階常微分方程式と常微分方程式系

第IV部 ルベーグ積分

第12章 準備. 半連続関数 183

◆ディニの定理 ◆上半連続関数と下半連続関数
◆集合の特性関数

第13章 半連続関数のルベーグ積分，コンパクト集合の体積 193

◆連続関数 ◆半連続関数の積分
◆フビニの定理 ◆体積
◆回転対称関数の積分

第14章 関数，集合のルベーグ積分 213

◆上積分 ◆下積分
◆ルベーグ積分 ◆ルベーグ積分の近似
◆集合の可積分性

第15章 零関数と零集合. フビニの定理 225

◆零関数 ◆零集合
◆カントール集合 ◆積分可能関数の同値類
◆L^1 空間 ◆積分可能関数に関するフビニの定理

第16章 ルベーグ積分論における収束定理 235

◆レビの単調収束定理 ◆ファトウの補題
◆ルベーグの優収束定理 ◆パラメーター付きの積分
◆積分と微分の交換可能性

第17章 可測関数，可測集合，イェンセンの不等式，エゴロフの定理 247

◆可測関数とその性質 ◆可測集合
◆単関数の極限としての可測関数 ◆可測関数の連続関数による合成の可測性
◆凸関数に関するイエンセンの不等式
◆可測関数列の一様収束性に関するエゴロフの定理

第18章 変換公式 259

◆重積分の変数変換 ◆極座標による積分

第Ⅴ部 L^p 空間とソボレフ空間

第19章 L^p 空間 271

◆L^p 関数 ◆ヘルダーの不等式
◆ミンコフスキーの不等式 ◆L^p 空間の完備性
◆L^p 関数の滑らかな関数(正則化)による近似
◆テスト関数

第20章 部分積分，弱微分，ソボレフ空間 293

◆部分積分の公式により定義される弱微分 ◆弱微分が L^p 空間に属するソボレフ関数
◆弱微分が十分高いベキ乗まで可積分であるソボレフ関数の連続性に関するソボレフの埋め込み定理
◆ポアンカレの不等式
◆ソボレフノルムが有界な関数列の L^p 収束性に関するレリッヒ・コンドラコフのコンパクト性定理

第Ⅵ部 変分法と楕円型偏微分方程式入門

第21章 ヒルベルト空間，弱収束 317

◆ヒルベルト空間の定義と性質 ◆リースの表現定理
◆弱収束 ◆有界列の弱収束性
◆有界関数列の算術平均の収束に関するバナッハ・サックスの補題

第22章 変分原理と偏微分方程式 *329*

◆ディリクレの原理
◆ディリクレ問題
◆変分問題
◆物理・連続体力学からの例
◆平衡状態
◆ラプラス作用素の極座標表示
◆弱調和関数
◆オイラー・ラグランジュ方程式
◆被積分関数が凸な汎関数の弱下半連続性
◆ハミルトンの原理
◆安定性

第23章 弱解の正則性 *367*

◆弱調和関数および楕円型偏微分方程式の弱階の正則性
◆境界の正則性
◆古典解

第24章 最大値原理 *385*

◆楕円型偏微分方程式の弱最大値原理と強最大値原理
◆ホップの境界点補題
◆リウヴィルの定理
◆勾配の評価

第25章 ラプラス作用素の固有値問題 *399*

◆レリッヒのコンパクト性定理の応用によるラプラス作用素の固有関数のなす L^2 空間の完全正規直交基底

索　引 *407*

訳者あとがき *417*

* 本書の脚注は訳者による.

第I部

一変数の微積分

第0章

準備

［ 実数列の収束や指数関数，対数関数の性質についてなど，基本的な事柄をいくつか復習する． ］

整数とは $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ の元で，自然数とは $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ の元のことである．

実数の集合 $\mathbb{R}$ における標準的な演算は既知のこととし，また複素数の集合 $\mathbb{C}$ は実質的には扱わないが，やはり習得済みとする．実数の順序付け $(<, \leq, >, \geq)$ や $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ における絶対値 $|\cdot|$ についても知っているものとする．

$a, b \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{R}$ の部分集合 $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, $(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, および $\mathbb{R}$ 自身を開区間といい， $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$, $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$, および $\mathbb{R}$ 自身を閉区間という．

集合論の標準的な記号，例えば $\subset$ （“部分集合”），量化子 $\forall$ （“すべての”）と $\exists$ （“ある”）なども使用する．

実数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ は

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon \tag{1}$$

を満たす[1]ときコーシー(Cauchy)列という．同様の概念は $\mathbb{C}$ でも定義される．すべてのコーシー列が極限値を持つという意味で $\mathbb{R}$ は完備である．つまり $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ がコーシー列なら

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |x - x_n| < \varepsilon \tag{2}$$

[1] この論理式は次のように読む.「任意の正数 ε に対して，ある(ε ごとに決まる)自然数 N が存在して，$n, m \geq N$ となるすべての自然数 n, m に対して $|x_n - x_m| < \varepsilon$ が成り立つ.」

となる $x \in \mathbb{R}$ が存在する．$\mathbb{C}$ も同様の完備性を持つ．

条件(2)が成立するとき，

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \tag{3}$$

と表し，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束するという．

逆に，すべての収束列はコーシー列である．さらに(2)におけるコーシー列の極限値 x は唯一つに定まる．

実数 $\mathbb{R}$ の完備性，つまり「$\mathbb{R}$ のコーシー列が極限値を持つこと」は公理であるが，収束列がコーシー列であることや極限値が唯一つに定まることは定理であり，$\mathbb{R}$ だけでなく，例えば有理数 $\mathbb{Q}$ でも成立する．今後頻繁に使うことになる必要なテクニックを思い出してもらうために，上の事実に証明を与えておく．

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が x に収束するとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな $N \in \mathbb{N}$ を選ぶと，$n, m \geq N$ となるすべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$|x_n - x| < \varepsilon/2,\ |x_m - x| < \varepsilon/2 \tag{4}$$

となるようにできる．これは(2)において ε のかわりに $\varepsilon/2$ を使えばよい．

三角不等式を使うと，(4)よりすべての $n, m \geq N$ に対して

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

が成立することがわかり，コーシー列であることが確かめられる．

収束列の極限値が唯一つであることを見るために，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が二つの極限値 x と x' を持っているとしてみよう．

$$\eta := |x - x'|$$

とおく．$\eta = 0$ をいえば $x = x'$ を得，極限値が唯一つであることを示したことになる．$\eta > 0$ のとき，$\varepsilon = \eta/2$ ととる．極限値 x に対し(2)を使うと，すべての $n \geq N$ に対して

$$|x_n - x| < \varepsilon = \eta/2$$

が成立するような N が存在することがわかる．同様に極限値 x' に対して(2)を使うと，すべての $n \geq N'$ に対して

$$|x_n - x'| < \varepsilon = \eta/2$$

が成立するような $N' \in \mathbb{N}$ が存在することがわかる．したがって $n \geq \max(N, N')$ に対して

$$\begin{aligned} \eta = |x - x'| &\leq |x_n - x| + |x_n - x'| \quad (\text{三角不等式を使うと}) \\ &< \eta/2 + \eta/2 = \eta \end{aligned}$$

を得る．$\eta > 0$ と仮定したので，これは矛盾である．つまり $\eta = 0$ であり，極限値が唯一つであることがわかる．

数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n > M$$

を満たしているとき，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

と書き，同様に

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n < M$$

のとき

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

と書く．

ボルツァーノ・ワイエルシュトラス(Bolzano-Weierstraß)の定理「有界列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ は収束する部分列を持つ」に言及しておこう．(「有界」とは $n \in \mathbb{N}$ によらない定数 $M \in \mathbb{R}$ が存在してすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|x_n| \leq M$$

が成立するという意味である.)　この定理は 1 章で使われる．証明は 7 章で与えられる(系 7.41)が，その証明には，それ以前の節の結果は使わない．この本では論理的な配列とは必ずしも一致しない教育的な配列を重んじているが，これはその例の一つである．もちろんすべての収束列は有界である．($x = \lim_{n\to\infty} x_n$ とすると，すべての $n \geq N$ に対して

$$|x_n - x| < 1$$

となる N が選べる．したがって

$$|x_n| \leq |x_n - x| + |x| < |x| + 1$$

であり

$$M := \max(|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |x| + 1)$$

とおくと

$$|x_n| \leq M \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

である.）　しかし有界列は(部分列でなくそれ自身が)収束するとは限らない.

例　奇数 n に対しては $x_n = 1$，偶数 n に対しては $x_n = 0$ で数列を定義すると，これは有界だが収束しない.

したがってボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理では，部分列をうまく選ばなくてはならない．部分列の極限値は集積点と呼ばれる．ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理は $\mathbb{R}$ の有界列は少なくとも一つ集積点を持つことを主張しているのである.

通常の演算は極限に移行する．すなわち，$\mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）の数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \tag{5}$$

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n \tag{6}$$

であるとき，数列 $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ は同様に収束し

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda x_n) = \lambda x. \tag{9}$$

最後に $y \neq 0$ のときには，$n \geq N$ に対して $y_n \neq 0$ となるような $N \in \mathbb{N}$ が存在し，数列 $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq N}$ は $\frac{x}{y}$ に収束する．(8)の証明を試みに与えておく．まず，数列が有界なので，

$$|x_n| < M$$

となる $M \in \mathbb{R}$ が存在する．$M' := \max(M, |y|)$ とおく．(2) を ε のかわりに $\frac{\varepsilon}{2M'}$ を使って (x_n) と (y_n) に適用すると，すべての $n \geq N_1$ に対して

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M'}$$

となる $N_1 \in \mathbb{N}$ と，すべての $n \geq N_2$ に対して

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M'}$$

となる $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在することがわかる．したがって $n \geq N := \max(N_1, N_2)$ に対して，

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n(y_n - y) + (x_n - x)y| \\ &\leq |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y| \\ &< M' \frac{\varepsilon}{2M'} + \frac{\varepsilon}{2M'} M' = \varepsilon \end{aligned}$$

を得る．したがって収束条件 (2) が $(x_n y_n)$ と $xy \in \mathbb{R}$ に対して成立するので，$(x_n y_n)$ は xy に収束する．

また，(5) と (6) が $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ に対して成り立っており，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \leq y_n$ ならば

$$x \leq y$$

である．

同様の手法や結果は無限級数，つまり各 x_n が

$$x_n = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu$$

の形の数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ にも適用できる．このような数列が $x \in \mathbb{R}$ に収束するとき

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu$$

と書く．

上の級数は

$$\xi_n := \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu|$$

とおいた数列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するとき絶対収束するという．

前に見た数列の収束に関するコーシーの判定条件を級数に適用すると，級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu$ が収束するのは

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq m \geq N : |\sum_{\nu=m}^{n} y_\nu| < \varepsilon$$

となるときであることがわかる．同様に級数の絶対収束をいうには，すべての $n \geq m \geq N$ に対して $\sum_{\nu=m}^{n} |y_\nu| < \varepsilon$ を示せばよい．

幾何級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} q^\nu = \frac{q}{1-q} \quad (0 < |q| < 1)$$

は最も大切な級数である．この級数を用いて，無限級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu$ が絶対収束するかどうかを判定する商判定法を紹介する．つまり $y_\nu \neq 0$ で，ある $0 < q < 1$ に対して

$$|\frac{y_{\nu+1}}{y_\nu}| \leq q \quad (\forall\ \nu \geq n_0)$$

となるとき無限級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu$ は絶対収束する．実際，仮定より

$$|y_\nu| \leq |y_{n_0}| q^{\nu - n_0}$$

なので，

$$\sum_{\nu=m}^{n} |y_\nu| \leq |y_{n_0}| \frac{1}{q^{n_0}} \sum_{\nu=m}^{n} q^\nu$$

となる．幾何級数は収束するのでコーシーの判定条件を満たし，右辺は十分大きな n, m をとればいくらでも小さくできる．したがって左辺もまたいくらでも小さくできる．つまり級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} |y_\nu|$ はコーシーの判定条件を満たし，よって収束する．

本書では初等超越関数，つまり $x \in \mathbb{R}$ で定義される指数関数 $\exp x = e^x$ と $x > 0$ で定義される対数関数 $\log x$ は既知とする．また $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ が登場する箇所もあるが，これらを本質的に使うことはない．

指数関数と対数関数に関する結果をまとめておく．指数関数は

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n \tag{10}$$

で定義される．e^x は狭義単調増加，すなわち

$$e^x < e^y \quad (x < y) \tag{11}$$

である．((12)を認めれば $e^z > 0$ $(z > 0)$ と併せて $x > y$ のとき $e^x = e^{x-y}e^y > e^y$ を得る.)

指数関数は関数等式

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad (\forall\, x, y \in \mathbb{R}) \tag{12}$$

を満たす．(10)より $e^0 = 1$ なので，この等式から特に

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}) \tag{13}$$

であることもわかる．さらに，次のような漸近的な性質

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty \quad (\forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \tag{14}$$

を持つ．(上の極限の意味を数列の言葉を用いて表すと $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ となるような任意の数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}}{x_n^m} = \infty$ が成立することである.)

証明 $x \to \infty$ を考えるので，$x > 0$ としてよい．$n \geq m+1$ に対して，二項定理より

$$\begin{aligned}(1+\frac{x}{n})^n &\geq \binom{n}{m+1}\frac{x^{m+1}}{n^{m+1}} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-m)}{n^{m+1}}\frac{1}{(m+1)!}x^{m+1}.\end{aligned}$$

よって

$$\frac{(1+\frac{x}{n})^n}{x^m} \geq \frac{n(n-1)\cdots(n-m)}{n^{m+1}}\frac{1}{(m+1)!}x.$$

$m \in \mathbb{N}$ を一つ固定すると $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m)}{n^{m+1}} = 1$ なので，$\frac{e^x}{x^m}$ は漸近的に，少なくとも x と同程度に増加する．したがって(14)が示せた． □

(14)と商の極限より

$$\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x} = 0 \quad (\forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \tag{15}$$

を得る．$y = \frac{1}{x}$ とおく．(14)より

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} y^m e^{1/y} = \infty \quad (\forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \tag{16}$$

も導ける．また，$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が0に収束し，すべての n で $a_n \neq 0$，$a_n > -1$ なら

$$\lim_{n \to \infty} (1 + a_n)^{1/a_n} = e \tag{17}$$

である．もっと一般に，$x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, すべての n に対して $a_n \neq 0$, $x a_n > -1$ であれば

$$\lim_{n \to \infty} (1 + a_n x)^{1/a_n} = e^x \tag{18}$$

となる．(これは(10)をほんの少し改良したもので，(10)から初等的な評価をすることで導くことができる．$x > 0$ の場合に帰着し $[|a_n|^{-1}] = N$ を使う.)

(18)より，以下の公式を得る($\alpha, x \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}
(e^x)^\alpha &= \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^{\alpha n} \\
&\qquad\qquad (\tfrac{x}{n} > -1 \text{ となる } n \text{ だけを考えても一般性を失わない}) \\
&= \lim_{n \to \infty} (1 + a_n \alpha x)^{1/a_n} \qquad (a_n := \frac{1}{\alpha \cdot n}) \qquad (19) \\
&= e^{\alpha x}.
\end{aligned}$$

対数関数は指数関数の逆関数として定義される．つまり

$$\log(e^x) = x \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}) \tag{20}$$

であり，また

$$e^{\log x} = x \quad (\forall\, x > 0) \tag{21}$$

となる．関数等式(12)より

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad (\forall\, x, y > 0) \tag{22}$$

が導かれ，(13)と併せて

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y \quad (\forall\, x, y > 0) \tag{23}$$

を得る．最後に

$$\log x^{\alpha} = \alpha \log x \quad (\forall\, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}). \tag{24}$$

これは

$$e^{\log(x^{\alpha})} = x^{\alpha} = (e^{\log x})^{\alpha} = e^{\alpha \log x} \quad ((19)\text{を使う})$$

よりでる．指数関数の単調性(11)から，対数関数の単調性

$$\log x < \log y \quad (\ 0 < x < y\ \text{であれば}) \tag{25}$$

が導かれる．2 章では指数関数の微分を計算するが，そこでは極限

$$\frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \quad (x_n \to 0,\ x_n \neq 0\ \text{と仮定する}) \tag{26}$$

を使う．この極限を求めるために

$$a_n := e^{x_n} - 1$$

とおく．すべての n に対して $a_n > -1$ であり $x_n \neq 0$ なので，$a_n \neq 0$ である．

対数関数は指数関数の逆関数なので

$$x_n = \log(a_n + 1).$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\log(a_n + 1)}$$

を計算すればよい．

$$\exp\left(\frac{\log(a_n + 1)}{a_n}\right) = (a_n + 1)^{\frac{1}{a_n}}$$

と書けるので，この右辺は(17)より e に収束する．

この結果から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\log(a_n + 1)} = \frac{1}{\log e} = 1 \tag{27}$$

であることをいうには，以下の一般論を用いる．

もし $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が $y_0 > 0$ に収束し，すべての n で $y_n > 0$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} \log y_n = \log y_0. \tag{28}$$

(1章で学ぶ言葉を使うと，対数関数が連続であるという.)

(23)を使うと，(28)は

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{y_n}{y_0} = 0 \tag{29}$$

と同値である．したがって(28)を示すには，$n \to \infty$ で1に収束する数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，すべての n で $b_n > 0$ となるものについて

$$\lim_{n\to\infty} \log b_n = 0 \tag{30}$$

となることを見ればよい．$\varepsilon > 0$ とせよ．(10)に見るように

$$e^{\varepsilon} > 1$$

である．したがって(13)より

$$e^{-\varepsilon} < 1.$$

(b_n) は1に収束するので，すべての $n \geq N$ に対して

$$e^{-\varepsilon} < b_n < e^{\varepsilon} \tag{31}$$

となるような $N \in \mathbb{N}$ が存在する．対数関数の単調性(25), (31)より

$$-\varepsilon < \log b_n < \varepsilon \tag{32}$$

を導くことができる．これで(30)が示せた．

このようにして(28)を証明したので，その結果として(27)も示したことになる．$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の定義より(27)は

$$\lim_{\substack{x_n\to 0\\ x_n\neq 0}} \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = 1 \tag{33}$$

と同値である．

最後に，線形代数で学ぶ $\mathbb{R}$ 上の(そして $\mathbb{C}$ 上の，ただしこれは本質的でない)ベクトル空間の概念も知っていると仮定する．特に，我々は $\mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ を扱う．

0 章の演習

1) 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，ある $n \geq N$ が存在し

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

を満たすとき，またそのときに限り $a \in \mathbb{R}$ は数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ の集積点であることを示せ．

2) 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束しているとする．このとき

$$b_n := \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$$

で定義される数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も a に収束することを示せ．逆も成立するか？ つまり $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が a に収束するならば $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は a に収束するか？

3) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ を有界な数列で，唯一つの集積点 a を持つとする．このとき (a_n) が a に収束することを示せ．これは非有界な数列の場合でも正しいか？

4) 以下の数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のうちどれが収束するか？ またそれらの極限値は？

a) $$a_n = \frac{n(n+1)}{n^2+1}$$

b) $$a_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0} \quad (a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, b_0, b_1, b_2 > 0)$$

c) $$a_n = \frac{13n^6 - 27}{26n^5\sqrt{n} + 39\sqrt{n}}$$

d) $$a_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^2}$$

e) $$a_n = \frac{\rho^n}{n^m} \quad (\ m \in \mathbb{N}, \rho \in \mathbb{R})$$

（答えは ρ によって異なる）．

5) 以下の級数のうちどれが収束するか？

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a \neq -1)$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+\mu)}} \quad (\mu > 0)$$

6) $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n := \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}$ とする．

以下を示せ．

a)
$$a_n \leq a_{n+1} \quad (\forall\, n)$$

b)
$$a_n \leq b_n \quad (\forall\, n)$$

c)
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n (= e)$$

7) $\alpha > 0$ とする．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log x} = \infty$$

と

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \log x = 0$$

を示せ．

第1章

関数の極限と連続性

[$\mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$) の部分集合上で定義された関数の連続性の概念を導入する．連続関数の初等的な性質を示した後，中間値の定理と有界閉集合上の連続関数が最大，最小値を持つことを証明する．]

定義 1.1 $f : D \to \mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$)を $D \subset \mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$)上の関数とする．$\lim_{n\to\infty} x_n = p$，$x_n \neq p$ となる任意の数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ となるとき $\lim_{x\to p} f(x) = y$ と書く．

定理 1.2 条件

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x-p| < \delta \text{ となる } \forall x \neq p \in D : \\ |f(x) - y| < \varepsilon \tag{1}$$

を満たすとき，またそのときに限り，定義 1.1 の意味で

$$\lim_{x\to p} f(x) = y$$

が成立する．

証明 "$\Leftarrow$"：$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ を $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ となる数列とすると，

$$\forall \delta \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |x_n - p| < \delta . \tag{2}$$

$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を(1)が成立するように選び，この δ に対して N を(2)のように選ぶ．すべての $n \geq N$ に対して

$$|f(x_n) - y| < \varepsilon.$$

したがって

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |f(x_n) - y| < \varepsilon$$

を示したことになる．つまり，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ であり，それゆえ定義より $\lim_{x\to p} f(x) = y$.

"$\Rightarrow$"：(1) を満たしていないとすると，

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D$$
$$|x - p| < \delta, \quad |f(x) - y| > \varepsilon\,. \tag{3}$$

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\delta = \frac{1}{n}$ とおき，この δ に対し (3) を満たす x で x_n を決める．すると $|x_n - p| < \frac{1}{n}$ であり，ゆえに $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. しかし (3) の ε に対し

$$|f(x_n) - y| > \varepsilon$$

なので $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq y$. □

定義 1.3 $D \subset \mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$) とし，$f : D \to \mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$) を関数，$p \in D$ とする．

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$$

のとき f は p で連続であるという．

f が D 上連続とは，f がすべての $p \in D$ で連続であることとする．

定理 1.4 定義 1.3 の意味で f が p で連続であるのは以下の条件を満たすとき，またそのときに限る．

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad |x - p| < \delta \text{ となる } \forall x \in D$$
$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon\,. \tag{4}$$

証明　定理 1.2. からの帰結． □

補題 1.5 $g : D \to \mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$) が $p \in D$ で連続で，$g(p) \neq 0$ とする．$|x - p| < \delta$ となるすべての $x \in D$ に対して

$$g(x) \neq 0$$

となるような $\delta > 0$ が存在する．

証明 $\varepsilon := \frac{|g(p)|}{2} > 0$ とおく．g は p で連続なので，$|x-p| < \delta$ となるすべての $x \in D$ に対して

$$|g(x) - g(p)| < \varepsilon = \frac{|g(p)|}{2}$$

となるような $\delta > 0$ が存在する．したがって

$$|g(x)| > \frac{|g(p)|}{2} > 0.$$

□

補題 1.6 $f, g : D \to \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）が $p \in D$ で連続ならば，$f+g$，fg も $p \in D$ で連続である．また $\lambda \in \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）とすると λf も $p \in D$ で連続である．さらに $g(p) \neq 0$ ならば f/g も p で連続である．

証明 0 章で見た収束列の和，積，商 の極限公式より従う． □

系 1.7 すべての多項式，つまり $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ の形の関数は連続である． □

系 1.8 $p \in D$ で連続な関数 $f : D \to \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）全体は $\mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）上のベクトル空間をなす．また D 上連続な関数全体も同様に $\mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）上のベクトル空間をなす． □

定義 1.9 $D \subset \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）上の関数 $f : D \to \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）が D 上一様連続とは

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad |x_1 - x_2| < \delta \text{ となる } \forall x_1, x_2 \in D \\ &\qquad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{5}$$

連続であることと一様連続の違いは，(4)式の δ は p によって異なってもよいが，(5)式では δ が考えている D 上のすべての点で共通の値にとれなくてはならないという点である．

例 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ として $f(x) = x^2$ をとる．f が任意の $p \in \mathbb{R}$ で連続であることを示す．$\varepsilon > 0$ に対して

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|p|+1}\right)$$

とおく．もし $|x-p|<\delta$ ならば

$$|x^2-p^2| = |x-p||x+p| \leq |x-p|(|x|+|p|) < |x-p|(2|p|+1) < \varepsilon.$$

したがって f は連続である．次に f は $\mathbb{R}$ 上一様連続でないことを示す．

そのために(5)の否定を証明する．つまり

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$
$$|x_1-x_2|<\delta,\ |f(x_1)-f(x_2)|>\varepsilon. \tag{6}$$

$\delta>0$ に対して $|x_1-x_2|=\frac{\delta}{2}$, $|x_1+x_2|>\frac{2}{\delta}$ となる $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ が存在する．したがって

$$|x_1^2-x_2^2| = |x_1-x_2||x_1+x_2| > 1.$$

よって $\varepsilon=1$ に対して(6)が証明された．

定理 1.10 $I=[a,b]$ を有界閉区間，$f: I \to \mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$) を連続な関数とすると，f は I 上一様連続である．

証明　もしそうでないとしよう．つまり

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x_1, x_2 \in I$$
$$|x_1-x_2|<\delta, \quad |f(x_1)-f(x_2)|>\varepsilon. \tag{7}$$

$n \in \mathbb{N}$ に対して $\delta=\frac{1}{n}$ とし $x_{1,n}=x_1$，$x_{2,n}=x_2$ を(7)のようにとる．ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より，有界列 $(x_{1,n})$ は収束する部分列(同じ記号で表す)を持つ．この極限を x_0 とする．I は閉区間なので $x_0 \in I$.

$$|x_{1,n}-x_{2,n}| < \frac{1}{n}$$

なので $\lim_{n\to\infty} x_{2,n} = x_0$.

f は連続なので

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{1,n}) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_{2,n})$$

であるが，これは(7)に矛盾する．

注意　定理 1.10 より $f(x)=x^2$ は有界閉区間 $[a,b]$ で一様連続である．しか

し前に示したように $f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続ではない．このように，ある関数が一様連続であるかどうかは定義域のとり方に依存する．

系 1.8 を思いだそう．

定義 1.11 $C^0(D,\mathbb{R})$, $C^0(D,\mathbb{C})$ をそれぞれ連続関数 $f : D \to \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{C}$ 全体のなすベクトル空間とする．$C^0(D,\mathbb{R})$ のことを $C^0(D)$ とも書く．

定義 1.12 $f : D \to \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）を $D \subset \mathbb{R}$ 上の関数，$0 < \alpha < 1$ とする．任意の有界閉区間 $I \subset D$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \le m_I |x - y|^\alpha \ (\forall\ x, y \in I) \tag{8}$$

となる $m_I \in \mathbb{R}$ が存在するとき，f は α-ヘルダー(Hölder)連続((8)式で $\alpha = 1$ の場合はリプシッツ(Lipschitz)連続)であるという．

$f, g : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ が α-ヘルダー連続であれば，$f + g$，λf, $(\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}))$ もヘルダー連続であることは簡単に確かめられる．

定義 1.13 α-ヘルダー連続関数 $f : D \to \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）全体のなすベクトル空間を $C^{0,\alpha}(D,\mathbb{R})$（または $C^{0,\alpha}(D,\mathbb{C})$）と書く．$C^{0,\alpha}(D,\mathbb{R})$ を $C^{0,\alpha}(D)$，また $C^{0,\alpha}(D)$ を $C^\alpha(D)$ とも書く．

いよいよ重要なボルツァーノの**中間値の定理**にとりかかる．

定理 1.14 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続であるとする．このとき f は $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 κ をとる．つまり，例えば $f(a) \le f(b)$ のとき

$$f(a) \le \kappa \le f(b)$$

となる κ に対して，$x_0 \in [a,b]$ が存在して

$$f(x_0) = \kappa$$

となる．

証明 $f - \kappa$ を考えることにより，$\kappa = 0$ の場合を考えれば良い．また $f(a) < f(b)$ と仮定しても良い．なぜなら，そうでない場合は f のかわりに $-f$ を考

えれば良いからである．したがって

$$f(a) < 0 < f(b)$$

とする．（もし $f(a)$ もしくは $f(b)$ が 0 であれば望みの x_0 をすでに見つけたことになる.）以下のように帰納的な構成を行う．

まず $a_0 = a, b_0 = b$ とおく．$a_n \geq a_{n-1}, b_n \leq b_{n-1}$，$a_n < b_n$ となるように a_n, b_n を構成していく．すでに構成した a_n, b_n に対して

$$c_n := \frac{1}{2}(b_n + a_n)$$

とおく．$f(c_n) = 0$ であれば $x_0 = c_n$ とすることができるのでこのプロセスはここで終了する．したがって以下では $f(c_n) = 0$ とはならないとしよう．

$f(c_n) < 0$ のとき，$a_{n+1} = c_n, b_{n+1} = b_n$ とおく．

$f(c_n) > 0$ のとき，$a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n$ とおく．

すると

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n).$$

ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$，および $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ が収束し，さらに

$$\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$$

なので，二つの部分列は同じ点 $x_0 \in [a, b]$ に収束する．

（実際，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ なので数列 (a_n) と (b_n) 自身が収束することが簡単にわかる.）

さらに

$$f(a_n) < 0, f(b_n) > 0 \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

であるので，連続な関数 f に対して

$$f(x_0) = \lim_{\nu\to\infty} f(\alpha_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} f(\beta_\nu) = 0$$

が成立する．このようにして求める x_0 が見つかった．□

定理 1.15 連続な関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は有界である，つまり

$$|f(x)| \leq M \quad (\forall x \in [a, b])$$

となる $M \geq 0$ が存在する．また f は最小値と最大値を $[a,b]$ でとる．つまり $x_0, x_1 \in [a,b]$ が存在して

$$f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\},$$
$$f(x_1) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

証明 x_0, x_1 の定義より

$$|f(x)| \leq \max(|f(x_0)|, |f(x_1)|) =: M$$

であるので，2 番目の主張から 1 番目の主張が得られる．f のかわりに $-f$ を考えれば f の最大値が存在するということは $-f$ の最小値が存在することと同じであるから，最小値が存在することだけを示す．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ を

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

となる数列とする (この時点ではこの inf が $-\infty$ である可能性は排除しない．このような場合は $f(x_n)$ は $-\infty$ に近づいていく.)

(x_n) は有界区間 $[a,b]$ に含まれるのでボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $(\xi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ が $x_0 \in [a,b]$ に収束する．f は $[a,b]$ 上連続なので

$$f(x_0) = \lim_{\nu\to\infty} f(\xi_\nu) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

を得る．$f(x_0)$ は有限なので特に最後の項は有限になり f は x_0 で最小値をとる．

注意 1) 記述を簡単にするために，以下上記のような証明の中で「$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $(\xi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ で収束するものが存在し」というかわりに「収束する $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列を選ぶことで」という．

2) 上記の定理が成立するためには，f の定義域が閉であることが大切である．実際 $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ は $(0,1)$ 上最小値も最大値もとらない．また $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ は $(0,1)$ で有界ですらない．しかし二つの関数はともに $(0,1)$ で連続である．

1 章の演習

1) 以下を示せ：

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ とする．$\lim_{x \to x_0} f(x)$ が存在するのは $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ が存在し，その極限値が一致しているとき，またそのときに限る．

2) $f, g : D \to \mathbb{R}$ は連続とする．

$$F(x) := \min(f(x), g(x))$$
$$G(x) := \max(f(x), g(x))$$

で定義される $F, G : D \to \mathbb{R}$ もまた連続であることを示せ．

3) 以下の関数は連続か？

a) $f : \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \qquad (x \neq 2), \quad f(2) = 0.$$

c) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \qquad (x \neq 2), \quad f(2) = -\frac{1}{4}.$$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 e^{(3x^2 + 6x + 1)}.$$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|} & x\neq 0,\\ 0 & x=0\,.\end{cases}$$

g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{|x|} & x\neq 0,\\ 0 & x=0\,.\end{cases}$$

4) 以下のような関数 $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を考える.

$$z(x):=\begin{cases}x-4n & x\in[4n-1,4n+1],\\ -x+4n+2 & x\in[4n+1,4n+3]\,.\end{cases}$$

z が一様連続であることを示せ.（一つの解法は z が $[-1,3]$ で連続であることを示し，次に任意の周期的連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$（つまり $\omega>0$ が存在してすべての $x\in\mathbb{R}$ に対して $f(x+\omega)=f(x)$）が一様連続であることを示す.）

5) $f:[a,b]\to[a,b]$（つまり $a\leq f(x)\leq b$）が連続関数とする．$f(x)=x$ となる $x\in[a,b]$ が存在することを示せ．（$f(x)=x$ となる x を f の不動点という.）

6) $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を奇数次の多項式，つまり

$$p(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_0$$

で，$k\in\mathbb{N}$ が奇数であるものとする．$p(x_0)=0$ となる $x_0\in\mathbb{R}$ が存在することを示せ.

第2章

微分可能性

［$\mathbb{R}$ の部分集合上定義された関数の微分可能性を定義し，また微分の基本公式を証明する．］

定義 2.1 $f: D \to \mathbb{R}$ を $D \subset \mathbb{R}$ 上の関数とする．関数 f が $x \in D$ で微分可能であるとは

$$f'(x) := \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D \setminus \{x\}}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0 \\ x+h \in D}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

が存在することである．$f'(x)$ のかわりに $\frac{df}{dx}$ とも書き，f の x での微分という．すべての $x \in D$ で微分可能であるとき f は D 上微分可能であるという．

（上の定義をするにあたって，x に収束する数列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{x\}$ が存在することは断らずに仮定している.）

注意 D はごく一般的な $\mathbb{R}$ の部分集合としているが，以降の応用にあたっては D は主に区間を考えている．

定理 2.2 $f: D \to \mathbb{R}$ を $D \subset \mathbb{R}$ 上の関数とする．$x_0 \in D$ に対して $(\xi_n) \subset D \setminus \{x_0\}$ を $\lim_{n \to \infty} \xi_n = x_0$ となる数列とすると仮定する．f が x_0 で微分可能で $f'(x_0) = c$ となるのは，$x \in D$ に対して

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x) \tag{1}$$

となるとき，またそのときに限る．ただし，ここで $\phi: D \to \mathbb{R}$ は

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0 \tag{2}$$

となる関数である．

もしくは

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\psi(x)}{x - x_0} = 0 \tag{3}$$

となる関数 $\psi : D \to \mathbb{R}$ が存在して

$$|f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)| \leq \psi(x) \tag{4}$$

が成立するといっても同じである．

証明　"$\Rightarrow$"：f が x_0 で微分可能とする．

$\phi(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ とおくと

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right) = 0.$$

"$\Leftarrow$"：(1)を満たすとすると

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c + \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = c. \qquad \square$$

系 2.3　$f : D \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in D$ で微分可能であれば，f は x_0 で連続．

証明　等式(3)より

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f'(x_0)||x - x_0| + \psi(x)$$

であり，$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = 0$ となる．これより

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

である．したがって f は x_0 で連続．　$\square$

もし $f, g : D \to \mathbb{R}$ が $x \in D$ で微分可能であれば，$f + g$ も x で微分可能であり

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x). \tag{5}$$

同様に $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x). \tag{6}$$

特に x で微分可能な関数 $f : D \to \mathbb{R}$ 全体はベクトル空間をなす．

次に積の微分公式を導く．

定理 2.4 $f, g : D \to \mathbb{R}$ を $x \in D$ で微分可能とする．このとき積 fg も微分可能で

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x). \tag{7}$$

証明 計算すべきことは

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D\setminus\{x\}}} \frac{f(\xi)g(\xi) - f(x)g(x)}{\xi - x} \\
&\quad = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D\setminus\{x\}}} \left\{ \frac{(f(\xi) - f(x))g(x) + (g(\xi) - g(x))f(\xi)}{\xi - x} \right\} \\
&\quad = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D\setminus\{x\}}} \left(\frac{(f(\xi) - f(x))}{\xi - x} g(x) \right) + \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D\setminus\{x\}}} \left(\frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x} f(\xi) \right) \\
&\quad = f'(x)g(x) + g'(x) \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D\setminus\{x\}}} f(\xi) \quad \text{（0 章で述べた極限の公式より）} \\
&\quad = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)
\end{aligned}$$

（系 2.3 で見たように f は x で連続なので）． □

同様に**商の微分公式**を得る．

定理 2.5 $f, g : D \to \mathbb{R}$ が $x \in D$ で微分可能であり $g(x) \neq 0$ とする．このとき f/g も x で微分可能であり

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}. \tag{8}$$

証明 g は x で連続なので（系 2.3），ある $\delta > 0$ が存在して

$$g(\xi) \neq 0 \quad (\ |\xi - x| < \delta).$$

したがって必要なら部分列をとって，ξ が x に近づくとき $g(\xi) \neq 0$ としてよい．

$$\lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi\in D\setminus\{x\}}} \frac{1}{\xi-x}\left(\frac{f(\xi)}{g(\xi)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi\in D\setminus\{x\}}} \frac{1}{\xi-x}\frac{f(\xi)g(x)-g(\xi)f(x)}{g(\xi)g(x)}$$

$$=\lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi\in D\setminus\{x\}}} \frac{1}{g(\xi)g(x)}\lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi\in D\setminus\{x\}}} \frac{f(\xi)g(x)-g(\xi)f(x)}{\xi-x}$$

$$=\frac{1}{g^2(x)}\lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi\in D\setminus\{x\}}}\left(\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}g(x)-\frac{g(\xi)-g(x)}{\xi-x}f(x)\right)$$

（g が x で連続なので）

$$=\frac{f'(x)g(x)-f'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

□

次に重要な**連鎖律**（合成関数の微分）を導く．

定理 2.6 $f: D_1\to\mathbb{R}$ は $x\in D_1$ で微分可能で $f(D_1)\subset D_2$，$g: D_2\to\mathbb{R}$ は $y:=f(x)$ で微分可能とする．このとき $g\circ f$ は x で微分可能で

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x). \tag{9}$$

証明

$$\lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi\in D_1\setminus\{x\}}}\frac{g(f(\xi))-g(f(x))}{\xi-x}$$

$$=\lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi\in D_1\setminus\{x\}}}\frac{g(f(\xi))-g(f(x))}{f(\xi)-f(x)}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}$$

を計算したい．ここで少々テクニカルな問題が生じる．つまり $\xi\neq x$ であっても $f(\xi)=f(x)$ となるかもしれないので，最初の商は定義できない可能性もある．しかし

$$g^{(1)}(\eta):=\begin{cases}\frac{g(\eta)-g(y)}{\eta-y} & (\eta\neq y)\\ \lim_{\substack{\eta\to y\\ \eta\in D_2\setminus\{y\}}}\frac{g(\eta)-g(y)}{\eta-y}=g'(y) & (\eta=y)\end{cases}$$

を考えることで容易にこの問題を回避することができる．ここで g が y で微分可能であることを使っていることに注意しよう．上の極限を下のように置き換え

$$\lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi\in D_1\setminus\{x\}}}\left(g^{(1)}(f(\xi))\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\right)$$

$$=g'(f(x))f'(x)$$

を得る．最後の等式は第 1 項で，f の x での連続性(系 2.3)を，第 2 項で f の x での微分可能性を使う． □

次の結果は，ある関数の微分がわかっている場合に，その逆関数の微分を計算する方法を与える．それを述べるために，まず言葉を用意する．I を区間とする．$f: I \to \mathbb{R}$ が単調増加(減少)であるとは $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in I)$ に対して $f(x_1) \leq (\geq) f(x_2)$ となることである．また $x_1 < x_2$ に対して $f(x_1) < (>) f(x_2)$ となるとき f は狭義単調増加(減少)という．

定理 2.7 $I \subset \mathbb{R}$ を開区間とし，$f: I \to \mathbb{R}$ を狭義単調増加(または減少)であるとする．このとき連続関数

$$\varphi : f(I) \to \mathbb{R}$$

で，次を満たすものが存在する．

$$\varphi \circ f(x) = x \quad (\forall x \in I) \tag{10}$$

$$f \circ \varphi(y) = y \quad (\forall y \in f(I)). \tag{11}$$

このような φ を f の逆関数という．普通 f の逆関数 φ を f^{-1} と書く．φ も狭義単調増加(または減少)である．f が $x \in I$ で微分可能であり $f'(x) \neq 0$ であれば φ は $y := f(x)$ で微分可能で

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}, \tag{12}$$

もしくは $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ と表す．

証明 f は狭義単調なので単射である．したがってすべての $y \in f(I)$ に対して唯一つの $x \in I$ が存在し

$$f(x) = y$$

となる．

$$x = \varphi(y)$$

とおくと φ は(10)，(11)を満たす．

f が単調であれば φ も単調である．単調減少の場合は f のかわりに $-f$ を

考えれば単調増加の場合に帰着するので単調増加の場合についてだけ考える．狭義単調増加であれば

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$$

なので $y_i = f(x_i),\ i = 1, 2$ に対して

$$\varphi(y_1) < \varphi(y_2) \iff y_1 < y_2.$$

これは φ の単調性を意味する．

次に φ の連続性を確かめる．そのために $y \in f(I),\ x := \varphi(y) \in I$ とおく．I は開区間なので

$$(x-\rho, x+\rho) \subset I$$

となる $\rho > 0$ が存在する．

φ が連続であることをいうには $0 < \varepsilon < \rho$ として考えて良い．このような ε に対して $x-\varepsilon$ と $x+\varepsilon$ は I に属する．f は狭義単調増加なので

$$f(x-\varepsilon) < y < f(x+\varepsilon).$$

したがってある $\delta > 0$ が存在して

$$f(x-\varepsilon) < y-\delta < y+\delta < f(x+\varepsilon).$$

$\varphi = f^{-1}$ は狭義単調なので $|\eta - y| < \delta$ となる $\eta \in f(I)$ に対して

$$x-\varepsilon < f^{-1}(\eta) < x+\varepsilon.$$

この式は $|\eta - y| < \delta$ であれば，$x = f^{-1}(y)$ なので

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)| < \varepsilon$$

を意味し，$\varphi = f^{-1}$ の連続性が確かめられる．微分可能性については，$y = f(x)$ に収束する数列 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(I)$ を考え $x_n := \varphi(y_n)$ とおく．すでに φ が連続であることを見たので

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

すべての n で $y_n \neq y$ とすると φ の狭義単調性より，すべての n で $x_n \neq x$.

$f'(x) \neq 0$ なので

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(y_n) - \varphi(y)}{y_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

したがって

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

□

以上の結果を用いて多くの関数の微分を計算することができる.

例 定義 2.1 から明らかなように

0) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ はすべての $x \in \mathbb{R}$ で $f'(x) = 0$.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$ のとき

$$f'(x) = c \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

定義 2.1 よりの直接の帰結.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ のとき

$$f'(x) = 2x \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

$x^2 = x \cdot x$ と思い, (1) と積の微分公式より従う.

3) より一般に $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$ のとき

$$f'(x) = mx^{m-1} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

m に関する帰納法で証明できる ($x^m = x \cdot x^{m-1}$ とし積の微分公式を使う).

4) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^m}$, $m \in \mathbb{N}$ のとき

$$f'(x) = \frac{-m}{x^{m+1}} \quad (\forall\, x \neq 0).$$

(3) と商の微分公式を使う.

5) 指数関数 $\exp(x)=e^x$ については

$$\exp'(x)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{e^h-1}{h},\quad (0\text{章の}(12)\text{を用いる})$$
$$=e^x \quad (0\text{章の}(33)\text{より}).$$

このように指数関数は関数自身とその微分が等しい，つまり

$$f'(x)=f(x)\quad (\forall\, x\in\mathbb{R})$$

という面白い性質を持っている．

6) さらに一般に，$f(x)=e^{cx}$, $c\in\mathbb{R}$ で

$$f'(x)=ce^{cx}=cf(x)\quad (\forall\, x\in\mathbb{R}).$$

(1), (5) と連鎖律より従う．

7) 対数関数については定理 2.7 と (5) を併せると

$$\log'(x)=\frac{1}{\exp'(\log x)}=\frac{1}{\exp(\log x)}=\frac{1}{x}\quad (x>0).$$

8) 微分可能関数 $f:D\to\mathbb{R}$ が $x\in D$ で $f(x)>0$ であるとき，連鎖律と (7) より

$$(\log f(x))'=\log'(f(x))f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

次に2階および高階微分を定義する．

定義 2.8 $f:D\to\mathbb{R}$ を微分可能関数とする．f' が x で微分可能であるとき f は $x\in D$ で2回微分可能であるといい

$$f''(x):=(f')'(x)\quad (f'\text{ の }x\text{ における微分})$$

または $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$ と書く．（後者の記号は $(\frac{d^2}{dx^2})f=(\frac{d}{dx})^2f=\frac{d}{dx}(\frac{df}{dx})$ の意である．） 帰納的に，k 回微分可能な $f:D\to\mathbb{R}$ が $x\in D$ で $(k+1)$ 回微分可能とは k 階微分 $f^{(k)}=\frac{d^k}{dx^k}f$ が x で微分可能であることである．D で $(k+1)$ 階微分 $f^{(k+1)}$ が存在して連続なとき D で $(k+1)$ 回連続微分可能という．

定義 2.9 D 上の実数値 k 回連続微分可能関数のなすベクトル空間を $C^k(D,\mathbb{R}) = C^k(D)$，$f \in C^k(D)$ かつ $f^{(k)} \in C^{0,\alpha}(D)$ $(0 < \alpha \leq 1)$ となる関数全体のなすベクトル空間を $C^{k,\alpha}(D,\mathbb{R}) = C^{k,\alpha}(D)$ と書く．最後に $C^\infty(D,\mathbb{R}) = C^\infty(D) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(D)$ は D 上無限回微分可能な関数のなすベクトル空間である．

e^x が $C^\infty(\mathbb{R})$ に属することは明らかである．実際，指数関数は微分可能で，しかも微分が自分自身と一致するので，後者もまた微分可能であり，帰納的にすべての微分が微分可能であることがわかる．同様にすべての多項式は $C^\infty(\mathbb{R})$ に属する．なぜなら多項式の微分は再び多項式だからである．もう少し自明でない無限回微分可能な関数の例を挙げると

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1\,. \end{cases}$$

連鎖律と帰納法を使うと f が $|x| \neq 1$ で無限回微分可能であることがわかるので，± 1 で無限回微分可能であることを見れば良い．f は偶関数，つまりすべての x で $f(x) = f(-x)$ なので $x = -1$ での挙動は $x = 1$ での挙動と等しい．したがって $x = 1$ でだけ考えればよい．$y := \varphi(x) := \frac{1}{1-x^2}$ とおく．$f(x) = e^{-y}$.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \varphi(x) = \infty$$

なので 0 章の (15) より

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 0.$$

ゆえに f は $x = 1$ で連続．これはもちろん最初の第一歩にすぎない．f の $x = 1$ における微分可能性も見なくてはいけない．

$|x| < 1$ では連鎖律と商の微分公式より

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} f(x) = 2xy^2 e^{-y}.$$

0 章の (15) を再び用いて，

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = 0.$$

したがって f は $x=1$ で微分可能(演習2を見よ).帰納的に,$|x|<1$ ではすべての $n\in\mathbb{N}$ に対して $f^{(n)}(x)$ は x と $y=\varphi(x)$ の多項式に e^{-y} をかけた形をしていることがわかる.$|x|<1$ なので,すべての x を含む項は有界であり0章の(15)より,$m\in\mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{y\to\infty} y^m e^{-y}=0.$$

したがって

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f^{(n)}(x)=0 \quad (\forall\, n\in\mathbb{N}).$$

こうして f は $x=1$ で何度でも微分可能で

$$f^{(n)}(1)=0 \quad (\forall\, n\in\mathbb{N}).$$

2章の演習

1) 以下の関数で $x_0=0$ で微分可能なものはどれか?

a) $f(x)=x|x|$.

b) $f(x)=|x|^{\frac{1}{2}}$.

c) $f(x)=|x|^{\frac{3}{2}}$.

d) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0).\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{|x|}} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0).\end{cases}$

2) $f:D\to\mathbb{R}$ $(D\subset\mathbb{R})$ は関数,$x\in D$ とする.

f が x で微分可能なのは,次の二つの極限が存在し一致するとき,ま

たそのときに限ることを示せ．

$$f'_-(x) := \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D, \xi < x}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, f'_+(x) := \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D, \xi > x}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}.$$

3) $I \subset \mathbb{R}$ を区間，$f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f(x_0) = 0$ で，f は x_0 で微分可能とする．以下の条件のいずれかを満たすとき $f \cdot g$ が x_0 で微分可能であることを示し，$(f \cdot g)'(x_0)$ を計算せよ．

a: g は x_0 で連続．

b: $f'(x_0) = 0$ で g は I 上有界．

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を微分可能関数，$x_0 \in \mathbb{R}$ とする．アフィン線形関数のなかで

$$\bar{f}(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

が f の x_0 における最も良い近似を与えることを示せ．つまり任意のアフィン線形関数 $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\ell(x) = cx + d$) に対して $\delta > 0$ が存在しすべての $|x - x_0| < \delta$ となる x に対して

$$|f(x) - \bar{f}(x)| \le |f(x) - \ell(x)|.$$

第 3 章

微分可能関数の性質，微分方程式

［ 微分可能関数に対する平均値の定理を扱い，最小値，最大値を微分の言葉で特徴づける．微分方程式の初歩的な性質を導き，最後にテイラーの公式を学ぶ． ］

定義 3.1 $f : D \to \mathbb{R}$ を $D \subset \mathbb{R}$ 上の関数とする．ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$|x_0 - y| < \varepsilon$ となるすべての $y \in D$ に対して

$$f(y) \geq f(x_0) \quad (f(y) \leq f(x_0)) \tag{1}$$

となるとき，f は $x_0 \in D$ で極小(極大)値をとるという．狭義極小値(極大値)とは，(1)式で $y \neq x_0$ に対しては " $>$ " (" $<$ ") となる極小値(極大値)のことである．

$x_0 \in D$ が f の D での最小値(最大値)を与えるとは，(1)式が $|x_0 - y| < \varepsilon$ となる y に対してだけでなく，すべての $y \in D$ に対して成立することである．

注意 x_0 で f が D での最小値をとるのは

$$f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in D\}$$

のときである．したがってここでの定義は 1 章で使った言葉使いに適合している．

定理 3.2 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ は $x_0 \in (a,b)$ で極小値または極大値をとる関数とする．f が x_0 で微分可能なら $f'(x_0) = 0$.

証明 最大値は，f のかわりに $-f$ を考えれば最小値になるので，最小値の場合だけを考える．ある $\varepsilon > 0$ が存在して $\xi \in (a,b) \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ に対して

$$f(\xi) \geq f(x_0)$$

とする．

もし $\xi < x_0$ であれば

$$\frac{f(x_0)-f(\xi)}{x_0-\xi} \leq 0$$

であり，$\xi > x_0$ であれば

$$\frac{f(x_0)-f(\xi)}{x_0-\xi} \geq 0.$$

f は x_0 で微分可能なので

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{\xi \to x_0 \\ \xi \neq x_0}} \frac{f(x_0)-f(\xi)}{x_0-\xi} = 0$$

でなくてはならない．□

例　1) $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $x_0 = 0$ で最小値をとる．

2) $f(x) = x^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $f'(0) = 0$ となるが $x_0 = 0$ で極小値も極大値もとらない．このように，$f'(x_0) = 0$ は極小，極大値の十分条件ではない．

3) $f(x) = x$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は $x_0 = 0$ で極小値をとり，$x_0 = 1$ で極大値をとる．しかしながらどちらの場合も $f'(x_0) = 0$ ではない．このようなことが起こるのは f の定義域 $[0,1]$ が $x_0 = 0$ の開近傍も $x_0 = 1$ の開近傍も含まないからである．

4) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $x_0 = 0, 1$ で $f'(x_0) = 0$ となり $x_0 = 0$ で極大値，$x_0 = 1$ で極小値をとる．

定理 3.3（ロル(Rolle)の定理）$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は $[a,b]$ $(a < b)$ で連続，(a,b) で微分可能とする．$f(a) = f(b)$ であるとき $f'(x_0) = 0$ となる $x_0 \in (a,b)$ が存在する．

証明　f が $[a,b]$ で定数であれば，すべての $x \in (a,b)$ で $f'(x) = 0$．f が定数でないとき $f(x_1) \neq f(a) (= f(b))$ となる $x_1 \in (a,b)$ が存在する．一般性を失わず $f(x_1) > f(a)$ としてよい．連続な関数 f はある $x_0 \in [a,b]$ で

最大値をとる．最大値では $f(x_0) \geq f(x_1) > f(a) = f(b)$, したがって特に $x_0 \in (a,b)$．f は (a,b) で微分可能なので定理 3.2 より $f'(x_0) = 0$. □

系 3.4（第 2 平均値の定理） $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続で，(a,b) で微分可能な関数とする．$g(b) \neq g(a)$ であり，またすべての $x \in (a,b)$ で $g'(x) \neq 0$ とする．このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

となる $x_0 \in (a,b)$ が存在する．

証明

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

とおく．$F(a) = 0 = F(b)$ なのでロルの定理より

$$0 = F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)$$

となる $x_0 \in (a,b)$ が存在する． □

特別な場合として，以下の**第 1 平均値の定理**を得る．

系 3.5 $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が $[a,b]$ で連続で (a,b) で微分可能な関数とする．このとき

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

となる $x_0 \in (a,b)$ が存在する．

系 3.5 よりさらに次を得る．

系 3.6 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能で

$$\mu \leq f'(x) \leq m \quad (\forall\, x \in (a,b))$$

とする．$a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ に対して

$$\mu(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq m(x_2 - x_1).$$

さらに $M := \max(|\mu|, |m|)$ とおくと

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le M|x_2 - x_1| \quad (\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)).$$

特に $f'(x) \equiv 0$ なら f は定数. □

特に，次を得る.

系 3.7 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ を微分可能関数とする．すべての $x \in (a,b)$ で $f'(x) \ge 0$ となるとき，

$$f(x_1) \le f(x_2) \quad (a < x_1 \le x_2 < b)$$

が成立する．即ち f は単調増加関数である.

同様に (a,b) 上 $f'(x) \le 0$ のとき，

$$f(x_1) \ge f(x_2) \quad (a < x_1 \le x_2 < b)$$

である．即ち f は単調減少関数である.

もし $f'(x) > 0$ であれば，系(3.7)の最初の不等式において，狭義の不等式（つまり $x_1 < x_2$ に対して等号を含まない不等式）が成立する．$f'(x) < 0$ の場合も同様である. □

次も系 3.6 からの簡単な帰結である.

系 3.8 $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ は $[a,b]$ 上連続，(a,b) 上微分可能で

$$f_1(a) = f_2(a),$$

$$f_1'(x) \le f_2'(x) \quad (\forall x \in (a,b))$$

を満たすものとする．このとき

$$f_1(x) \le f_2(x) \quad (\forall x \in [a,b])$$

が成立する.

証明 関数 $f = f_1 - f_2$ は

$$f'(x) \le 0 \quad (\forall x \in (a,b))$$

を満たす．系 3.6 を $m = 0, x_1 = a, x_2 = x$ の場合に適用することで

$$f(x) \le 0$$

を得る．これが主張したかったことである. □

系 3.6 よりまた次の系を得る．

系 3.9 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上連続，(a,b) 上微分可能とする．ある定数 γ に対して

$$f'(x)\equiv\gamma$$

となるとき，ある定数 c が存在して，すべての $x\in[a,b]$ に対して

$$f(x)=\gamma x+c.$$

証明

$$F(x):=f(x)-\gamma x$$

とおく．$F:[a,b]\to\mathbb{R}$ は系 3.6 の仮定を満たし，(a,b) 上

$$F'(x)=f'(x)-\gamma\equiv 0.$$

したがって，ある定数 c が存在して $[a,b]$ 上 $F\equiv c$ となる． □

定理 3.10 $\gamma\in\mathbb{R}$ とし，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は微分方程式 $f'=\gamma f$ を満たす関数とする．つまりすべての $x\in\mathbb{R}$ に対して $f'(x)=\gamma f(x)$ を満たすとする．このとき

$$f(x)=f(0)e^{\gamma x}\quad(\forall\ x\in\mathbb{R}).$$

証明 1

$$F(x):=f(x)e^{-\gamma x}$$

を考える．

$$F'(x)=f'(x)e^{-\gamma x}-\gamma f(x)e^{-\gamma x}=0$$

であるので，系 3.6 より

$$F\equiv F(0)=f(0).$$

したがって

$$f(x)=f(0)e^{\gamma x}.$$

□

証明 2 $f\equiv 0$ のときは，証明すべきことはない．$f(x_0)\neq 0$ となる $x_0\in\mathbb{R}$ が存在する場合を考える．$f(x_0)>0$ としよう．（そうでないときは $-f$ とすれ

ば良い.）f は連続なので x_0 の近傍 $U(x_0)$ が存在して，すべての $x \in U(x_0)$ で $f(x) > 0$ である．$x \in U(x_0)$ に対して

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \gamma.$$

したがって，系 3.9 より，ある定数 c が存在して $\log f(x) = \gamma x + c$ となる．ゆえに($x \in U(x_0)$ で)

$$f(x) = c_1 e^{\gamma x} \text{ (ただしここで } c_1 = e^c). \tag{2}$$

次に f が恒等的にゼロでないとき $f(x) = 0$ は解を持たないことが示す．このために，$x \in U(x_0)$ に対して $f(x) \neq 0$ であれば(2)が $U(x_0)$ 上成立することに注意する．もし，$f(x) = 0$ となる点があったとする．f は恒等的にゼロでないので $f(x_0) > 0$ となる x_0 が存在し，f が連続なので，$x_1 > x_0$ で $f(x_1) = 0$ となるような最小の x_1，または $x_2 < x_0$ で $f(x_2) = 0$ となる最大の x_2 が存在する．最小の x_1 が存在するとき，(2)が $x_0 \leq x < x_1$ で成立する．したがって

$$\lim_{\substack{x \to x_1 \\ x < x_1}} f(x) = c_1 e^{\gamma x_1} > 0 = f(x_1)$$

となり，f の連続性に矛盾する．ゆえに，このような x_1 は存在しない．同様に x_2 も存在しない．これより f はゼロにならず，すべての $x \in \mathbb{R}$ で(2)が成立する．$x = 0$ とおけば $c_1 = f(0)$ である．□

上の証明で $f(x) = 0$ とならないことを証明するために局所解(2)を用いたが抽象的な議論によって証明することもできる．

定理 3.11 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を微分可能な関数で，ある定数 γ が存在し，すべての $x \in [a, b]$ で $|f'(x)| \leq \gamma |f(x)|$ とする．もしある $x_0 \in [a, b]$ で $f(x_0) = 0$ となれば $[a, b]$ 上 $f \equiv 0$.

証明　$\gamma > 0$ としてよい．そうでないときは証明すべきことはない．

$$\delta := \frac{1}{2\gamma}$$

とおき，$x_1 \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b] =: I$ を

$$|f(x_1)| = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

となるようにとる．（そのような x_1 が存在することは f の連続性よりわかる.）

系 3.6 より

$$|f(x_1)| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq |x_1 - x_0| \sup_{\xi \in I} |f'(\xi)|$$
$$\leq \gamma |x_1 - x_0| \sup_{\xi \in I} |f(\xi)| \leq \gamma\delta |f(x_1)| = \frac{1}{2}.|f(x_1)|.$$

したがって $f(x_1) = 0$. これより

$$f(x) = 0 \qquad (\forall\ x \in I).$$

よって，以下のような性質を満たすある定数 $\delta > 0$ が存在することがわかった．もし $f(x_0) = 0$ なら，すべての $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$ で $f(x) = 0$. もし f が恒等的にゼロでなければ $f(\xi_1) = 0$ となる最小の ξ_1 が $a < \xi_1 \leq b$ に存在するか，または $f(\xi_2) = 0$ となる最大の ξ_2 が $a \leq \xi_2 < b$ に存在する．しかし，これはたった今証明したことと矛盾する． □

系 3.12 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をリプシッツ(Lipschitz)連続な関数，$c \in \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ とする．微分方程式

$$f'(x) = \phi(f(x)) \qquad (\forall\ x \in [a, b])$$
$$f(a) = c$$

の解 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は高々一つしか存在しない．

証明 f_1 と f_2 を $f_1(a) = f_2(a) = c$ となる解としよう．$F = f_1 - f_2$ は

$$F(a) = 0$$

を満たす．さらに f_1 と f_2 は連続なので有界区間 $[a, b]$ をある有界区間に写し，また ϕ がリプシッツ連続なのである適当な定数 L が存在して

$$|F'(x)| = |\phi(f_1(x)) - \phi(f_2(x))|$$
$$\leq L|f_1(x) - f_2(x)| = L|F(x)|.$$

定理 3.11 より $F \equiv 0$，つまり $f_1 \equiv f_2$. これは解が唯一つしかないことを意味する． □

後に定理 6.16 において，微分方程式

$$f'(x) = \phi(x, f(x)) \tag{2}$$

を考察し，もし ϕ が一様有界で，かつ第 2 変数に関して一様にリプシッツ連続，即ち，ある定数 M, L が存在して，問題に係わるすべての x, y, y_1, y_2 に対して

$$|\phi(x,y)| \leq M \tag{3}$$

$$|\phi(x,y_1) - \phi(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \tag{4}$$

を満たせば，この微分方程式は $f(a) = c$ となる解を $[a, a+h]$ 上持つことを見る．

一様リプシッツ連続性が必要であることを見るために，微分方程式の解が有限区間上で無限の値を取る状況を解析しよう．

定理 3.13 微分方程式

$$f'(x) = \phi(f(x)) \tag{5}$$

において，ある $\gamma > 0, \alpha > 1$ が存在して

$$\phi(y) \geq \gamma y^\alpha \tag{6}$$

を満たすとする．f を (5) の解で

$$f(a) = c > 0$$

となるものとするとき，$b_1 > a$ が存在して，x が下から b_1 に近づくとき，$f(x)$ は ∞ に近づく．従って f は b_1 を超えて連続な (5) の解にはなり得ない．

注意 このようなとき f は b_1 で "爆発する" と言う．

証明 $f(a) = c > 0$ であり，かつ $f(x)$ が正である限り (5) の右辺は正なので，$f(x)$ は x の単調増加関数である．$n \in \mathbb{N}, n \geq c$ とする．

$$f(x_n) = n$$

となる $x_n \geq a$ が存在したと仮定しよう．f は単調増加なので，$x \geq x_n$ に対して $\phi(f(x)) \geq \gamma f(x)^\alpha \geq \gamma f(x_n)^\alpha = \gamma n^\alpha$ である．従って系 3.6 より，$x \geq x_n$ に対して

$$f(x) \geq f(x_n) + (x - x_n)\gamma n^\alpha$$
$$= n + (x - x_n)\gamma n^\alpha$$

が成立する．これより $f(x_{n+1}) = n + 1$ となる x_{n+1} が存在することが分かり，更に

$$n + 1 = f(x_{n+1}) \geq n + (x_{n+1} - x_n)\gamma n^\alpha$$

なので

$$x_{x+1} \leq \frac{1}{\gamma n^\alpha} + x_n$$

である．この不等式を繰り返し使うことで，$N \geq n_0 \geq c$ となる任意の N に対して

$$x_N \leq \sum_{n=n_0}^{N-1} \frac{1}{\gamma n^\alpha} + x_{n_0}$$

を示すことが出きる． n_0 を $n \geq c$ となる最小の $n \in \mathbb{N}$ とする．上記と全く同様の議論により

$$x_{n_0} \leq \frac{n_0 - c}{\gamma c^\alpha} + a$$

を得る．すべてを併せると

$$x_N \leq \sum_{n=n_0}^{N-1} \frac{1}{\gamma n^\alpha} + \frac{n_0 - c}{\gamma c^\alpha} + a$$

である．ここで大切なのは $\alpha > 1$ に対して上の和を n_0 から ∞ まで足しても有限だということである．

$$b_0 := \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\gamma n^\alpha} + \frac{n_0 - c}{\gamma c^\alpha} + a$$

とおく．このとき

$$x_N \leq b_0$$

であり，また f は単調増加なので $x_{N+1} \geq x_N$ であるから，$(x_N)_{N \in \mathbb{N}}$ は，ある $b_1 \leq b_0$ に収束する．x_N を $f(x_N) = N$ となるものとして取ったので，f が単調増加であることと併せて，x が b_1 に近づくとき

$$f(x) \to \infty$$

となることが分かる． □

常微分方程式の解の増大度を定性的に調べるために，微分不等式

$$f'(x) \leq \gamma f(x)^{\beta} \tag{7}$$

を調べる．ここで f は正値関数, $\gamma > 0$ は定数, $0 \leq \beta < 1$ とする．f が $x \geq a$ におけるこの微分不等式の解のとき，$g := f^{1-\beta}$ に対して

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1-\beta)f^{-\beta}(x)f'(x) \\ &\leq \gamma(1-\beta) \end{aligned}$$

を得る．

$$g(a) = c$$

とおく．系 3.9 と系 3.8 より, $x \geq a$ に対して

$$g(x) \leq \gamma(1-\beta)(x-a) + c$$

を得る．元の f を使って表すと

$$f(x) \leq (\gamma(1-\beta)(x-a)+c)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

である．ここで大切なのは f は漸近的に

$$x^{\frac{1}{1-\beta}}$$

のオーダーで増加するということである．

ここまでの常微分方程式の解の定性的性質に関する考察をまとめてみよう．

ケース A：

$$f' = \gamma f.$$

このとき $f(x)$ は $e^{\gamma x}$ の定数倍，つまり**指数増大度**を持つ．

ケース B：

$$f' \geq \gamma f^{\alpha} \qquad (\alpha > 1).$$

このとき, 正の解は必ず爆発する．つまり有限区間で無限の値に到達する．この状況を**双曲的増大度**を持つという

ケース C：

$$f' \leq \gamma f^{\beta} \qquad (\beta < 1).$$

このとき解は x の有限べき乗，即ち $x^{\frac{1}{1-\beta}}$ で押さえられる．**多項式増大度**を持つという．

更に

$$f' \leq \gamma$$

のときには，f は高々線形増大度を持つ．

再び，関数の局所的な性質に話を戻す．

極小値であるか極大値であるかを判定するには 2 階微分を見るのがよい．

定理 3.14 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ を 2 回微分可能とし，$x_0 \in (a, b)$ を

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \tag{4}$$

となる点とする．このとき f は x_0 で狭義極小値をとる．$f''(x_0) < 0$ であれば x_0 で狭義極大値をとる．逆に f が $x_0 \in (a, b)$ で極小値をとり 2 回微分可能であれば

$$f''(x_0) \geq 0. \tag{5}$$

証明 これまでと同様に極小値の場合のみを扱う．系 3.7 で f に使った議論を f' に用いる．もし

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0$$

ならば，ある $\delta > 0$ が存在し

$$f'(x) < f'(x_0) = 0 \quad (x_0 - \delta < x < x_0),$$

$$f'(x) > f'(x_0) = 0 \quad (x_0 < x < x_0 + \delta).$$

したがって系 3.7 より f は $(x_0 - \delta, x_0)$ で狭義単調減少し $(x_0, x_0 + \delta)$ で狭義単調増加する．これは $0 < |x - x_0| < \delta$ で $f(x) > f(x_0)$，つまり f が x_0 で極大値をとることを意味する．

定理の後半は前半より従う． □

例 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ は $f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$ を満たす．したがって f は $x_0 = 0$ で狭義極小値をとる．

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4$ は $f'(0)=0$, $f''(0)=0$ であり，定理 3.14 の条件は満たさない．しかし f は $x_0=0$ で狭義極小値をとる．

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ は $f'(0)=0$, $f''(0)=0$ を満たす．しかし，$x_0=0$ で f は極小値も極大値もとらない．

最後に有名なテイラー(Taylor)の定理を学ぶ．

定理 3.15（テイラー展開）

$$f:[x_0,x]\to\mathbb{R}\quad(\text{または } f:[x,x_0]\to\mathbb{R},$$
$$x_0<x \text{ であるか } x<x_0 \text{ であるかに応じて選ぶ})$$

が $[x_0,x]$ で n 階連続微分 $f^{(n)}$ を持ち (x_0,x)（または (x,x_0)）で $(n+1)$ 回微分可能とする．このとき x_0 と x の間の点 ξ が存在して

$$\begin{aligned}f(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2\\&+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}\end{aligned}\tag{6}$$

が成立する．

証明

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(x_0)(x-x_0)^\nu+\frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}z\tag{7}$$

となる $z\in\mathbb{R}$ をとる．

$$\varphi(y):=f(x)-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(y)(x-y)^\nu-\frac{1}{(n+1)!}(x-y)^{n+1}z$$

とおくと φ は $[x_0,x]$ で連続，(x_0,x) で微分可能である．（$x_0<x$ の場合だけ議論する．$x>x_0$ の場合も同様に議論できる．）$\varphi(x)=0$ であり，また z のとり方より $\varphi(x_0)=0$ である．ロルの定理 3.3 より

$$\varphi'(\xi)=0$$

となる $\xi\in(x_0,x)$ が存在する．

$$\varphi'(y) = -f'(y) - \sum_{\nu=1}^{n}\Big(\frac{1}{\nu!}f^{(\nu+1)}(y)(x-y)^{\nu} - \frac{1}{(\nu-1)!}f^{(\nu)}(y)(x-y)^{\nu-1}\Big)$$
$$+\frac{1}{n!}(x-y)^n z$$
$$= -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(y)(x-y)^n + \frac{1}{n!}(x-y)^n z$$

なので，$\varphi'(\xi) = 0$ より

$$z = f^{(n+1)}(\xi).$$

これを(7)に代入し(6)を得る． □

3 章の演習

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は微分可能で，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して

$$f^{(n+1)} \equiv 0$$

とする．（つまり f の $(n+1)$ 階微分が恒等的に 0 になる.）このとき，f は高々n 次の多項式であることを示せ．

2) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続，さらに (a, b) で 2 回微分可能で

$$f'' = cf \quad (c > 0)$$

とする．すべての $x \in (a, b)$ に対して

$$|f(x)| \le \max(|f(a)|, |f(b)|)$$

が成り立つことを示せ．（ヒント：f が (a, b) で正の最大値も負の最小値もとらないことを示せ.）

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が微分可能で，ある $c \ge 0$ が存在して

$$|f'(x)| \le cf(x) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$$

とする．

a) ある $\gamma \ge 0$ に対して $|f(x)| \le \gamma e^{c|x|}$ となることを示せ．

b) さらに，ある $x_0 \in \mathbb{R}$ で $f(x_0) = 0$ とせよ．このとき $f \equiv 0$ を示せ．

4) $f:[a,b]\to[a,b]$ が微分可能で，すべての $x\in[a,b]$ で $f'(x)\neq 1$ とする．このとき，唯一つの $x\in[a,b]$ が存在して $f(x)=x$ となることを示せ．(このような x が存在することはすでに1章の演習(5)で示した．ここでの問題は唯一つしかないことを示すことである．)

5) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ は $x_0\in(a,b)$ で微分可能で，f' が x_0 で連続とする．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset(a,b)$ はすべての n で $x_n\neq y_n$ $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=x_0$ とする．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(x_0)$$

を示せ．

6) a) $p\geq 1$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{(1+x)^p}{1+x^p}$ とする．f の $[0,1]$ における最大値，最小値を決定せよ．またこれを用いて以下の不等式を示せ．

すべての $a,b\in\mathbb{R}$ で

$$|a|^p+|b|^p\leq(|a|+|b|)^p\leq 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p).$$

b) $p>1$, $q:=\frac{p}{p-1}$, $f(x)=\frac{|a|^p}{p}+\frac{x^q}{q}-|a|x$ for $x\geq 0$, $a\in\mathbb{R}$ とする．$x\geq 0$ における f の最小値を決定し，以下の不等式を示せ．すべての $a,b\in\mathbb{R}$ で

$$|ab|\leq\frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}.$$

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は微分可能で $f\not\equiv 0$ とし，また

$$f(x+y)=f(x)f(y)\quad(\forall\,x,y\in\mathbb{R})$$

を満たす．

$$f(x)=e^{\lambda x}\quad(\exists\,\lambda\in\mathbb{R})$$

を示せ．

第 4 章

バナッハの不動点定理. バナッハ空間の概念

［ 後続の章における収束定理を厳密に述べるために，バナッハ空間の概念を完備なノルム空間として導入する．バナッハの不動点定理について詳細に議論する． ］

定理 4.1 $I \subset \mathbb{R}$ を必ずしも有界とは限らない閉区間，$f : I \to \mathbb{R}$ を $f(I) \subset I$ となる関数で，ある固定した θ $(0 \leq \theta < 1)$ に対して不等式

$$|f(x) - f(y)| \leq \theta|x - y| \quad (\forall\, x, y \in I) \tag{1}$$

を満たすものとする．このとき f は唯一つの不動点，つまり

$$f(\xi) = \xi$$

となる $\xi \in I$ を持つ．

証明 任意の $x_0 \in I$ をとり 順次に

$$x_n := f(x_{n-1}) \quad (\forall\, n \geq 1)$$

を決めていく．$f(I) \subset I$ なので，このようにすることが可能である．(x_n) がコーシー列であることを示す．$n > m \geq 1$ に対して，

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\
&= |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| + \cdots + |f(x_m) - f(x_{m-1})| \\
&\leq \theta(|x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_m - x_{m-1}|) \\
&\leq \sum_{\nu=m}^{n-1} \theta^\nu |x_1 - x_0| \\
&\leq \theta^m \frac{1}{1-\theta}\, |x_1 - x_0| \ (0 \leq\ \theta < 1 \text{ であることを考慮する}).
\end{aligned}$$

$0 \leq \theta < 1$ なので，

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \forall\, n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

これより $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列であることがわかる.

$\mathbb{R}$ は完備であり, (x_n) がある $\xi \in \mathbb{R}$ に収束する. I は閉なので $\xi \in I$. さらに f は(1)より連続であるから,

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{m\to\infty} x_m = \xi.$$

したがって ξ は不動点である.

不動点が唯一つしか存在しないことを示すために, ξ_1, ξ_2 を不動点とする. つまり

$$f(\xi_1) = \xi_1, f(\xi_2) = \xi_2.$$

(1)より

$$|\xi_1 - \xi_2| = |f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq \theta|\xi_1 - \xi_2|$$

であり $\theta < 1$ なので $\xi_1 = \xi_2$ を得る. □

系 4.2 $I \subset \mathbb{R}$ を閉区間, $f : I \to \mathbb{R}$ を $f(I) \subset I$ となる微分可能な関数とする. $\theta (0 \leq \theta < 1)$ が存在して

$$|f'(x)| \leq \theta \quad (\forall\, x \in I)$$

となるとき, 唯一つの f の不動点 ξ が I に存在する.

証明　平均値の定理より

$$|f(x) - f(y)| \leq \theta|x - y| \quad (\forall\, x, y \in I).$$

(I は区間であることに注意.)

よって, 定理 4.1 の条件を満たし, したがって主張が証明された. □

定理 4.1 に戻り, 証明を詳しく調べてみよう. 実数のどの性質が証明に使われているかを見る. 使われた性質は以下の定義に挙げたものである.

定義 4.3 V は $\mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$) 上のベクトル空間とする. 写像

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

は以下の条件

(i) $v \in V$ に対して $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$ (正定値),

(ii) $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$) に対して $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$

(iii) $v, w \in V$ に対して，$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$（三角不等式），

を満たすときノルムという．ノルム $\|\cdot\|$ を持ったベクトル空間 V をノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ という．部分列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ が

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0$$

となるとき，(v_n) は（$\|\cdot\|$ に関して）v に収束するといい，$\|\cdot\|$ が文脈から明らかなときには単に $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ と書く．

例 $\mathbb{R}$ の絶対値 $|\cdot|$ は $\mathbb{R}^d$ 上のノルムに次のように拡張される．$x = (x^1, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x^i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,d} |x^i|.$$

ユークリッドノルム $\|x\|_2$ は特に重要である．$\|x\|_2$ のかわりに $\|x\|$ と書いたり $|x|$ と書くこともある．記号 $|x|$ は $\mathbb{R}$ の普通の絶対値 $|\cdot|$ との類似性を強調したいときに使う．ここで挙げた例は有限次元ベクトル空間のノルムであるが，後に無限次元ベクトル空間のノルムを扱う．無限次元ベクトル空間のノルムの性質は本書で学ぶ重要事項の一つである．

注意 ノルムの性質の中で，条件(ii)はこの章では使わない．そこで，より一般に X の距離を以下のように定義する．

定義 4.4 X 上の距離とは，以下の性質を満たす写像

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

のことである．

(i) $\forall\, x, y \in X : d(x,y) \geq 0$ であり，$d(x,y) = 0$ となるのは $x = y$ のときのみである（正値性）．

(ii) $\forall\, x, y \in X : d(x,y) = d(y,x)$（対称性）．

(iii) $\forall\, x, y, z \in X : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$（三角不等式）．

数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ は

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

のとき（d に関して）$x \in X$ に収束するという．

$\mathbb{R}$ のコーシー列が収束するという事実が定理 4.1 の証明では本質的であった．ノルム空間でのコーシー列の概念を定義する．

定義 4.5 V をノルム $\|\cdot\|$ を持ったノルム空間とする．点列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ は

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \geq N : \|v_n - v_m\| < \varepsilon$$

のとき（$\|\cdot\|$ に関する）コーシー列という．我々は，任意のコーシー列が収束するようなベクトル空間を特に扱う．

定義 4.6 ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ が完備もしくはバナッハ(Banach)空間であるとは，任意のコーシー列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ が，ある $v \in V$ に収束することである．$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ であれば $v \in A$ となるときバナッハ空間の部分集合 A は閉であるという．

ここまでの議論から次の結果を得る．

定理 4.7（バナッハの不動点定理） $(V, \|\cdot\|)$ をバナッハ空間，$A \subset V$ を閉部分集合とし，$f : A \to V$ を $f(A) \subset A$ となる写像で，ある $0 \leq \theta < 1$ が存在し，すべての $v, w \in V$ に対して

$$\|f(v) - f(w)\| \leq \theta \|v - w\|$$

とする．このとき f は唯一つの不動点を A 内に持つ．

証明　証明は定理 4.1 のときとまったく同じ．$\mathbb{R}$ のかわりに V を，I のかわりに A を，$|\cdot|$ のかわりに $\|\cdot\|$ を使えば良い．□

定義 4.8 定義 4.4 の続きとして，距離空間 (X, d) の列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列であることを

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

で定義する．距離空間 (X, d) は任意のコーシー列が X に極限を持つとき完備であるという．

注意　定理 4.7 は完備距離空間で成立する．$\|f(v) - f(w)\|$ のかわりに $d(f(v), f(w))$ などとすれば，いっさいの変更なしで証明ができる．

第5章
一様収束．収束の交換可能性．バナッハ空間の例．アルツェラ・アスコリの定理

［一様収束の概念を導入する．これにより連続関数，微分可能関数のなす空間にバナッハ空間の構造が自然に導入される．関数の収束列の微分の極限と極限の微分が等しくなるための条件や関連した問題について論じる．アルツェラ・アスコリ(Arzelà-Ascoli)の定理「有界閉集合上の同等連続，一様有界な関数列は一様収束する部分列を持つ」を証明する．］

定義 5.1 K を集合，$f_n (n \in \mathbb{N})$ を K 上定義された実数値(または複素数値)関数とする．すべての $x \in K$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ となるとき，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束するという．

注意 別の言い方をすると，すべての $x \in K$ で

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

が成り立つ．ここで N は一般に ε だけでなく x にも依存する．

例 1) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $f_n(x) = x^n$ と定義する．関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は

$$f(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

で定義される関数 f に各点収束する．実際 $x = 1$ ではいつでも $f_n(x) = 1$ であり，一方 $0 \leq x < 1$ では与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| = x^n < \varepsilon \quad (\forall\, n \geq N)$$

となる．実際例えば N として $\frac{\log \varepsilon}{\log x}$ より大きい自然数の中で最小のも

のをとればよい．f_n はいずれも連続であるが極限 f は連続でない．したがって各点収束の概念は，極限に連続性を伝達するには弱すぎるということがわかる．

2) 各点収束が弱すぎる概念であるということは，次の例でもっと顕著に示される．

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$ を f_n が連続で以下の条件を満たすように定義する．

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ n & x = \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \\ 1\text{ 次関数} & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1\text{ 次関数} & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \end{cases}$$

もしくは，より正確に

$$f_n(x) := \max(n - n^2|x - \frac{1}{n}|, 0)$$

で定義する．f_n は $f(x) = 0$ に各点収束する．なぜなら $f(0) = 0$ で，$0 < x \leq 1$ に対しては $\frac{2}{N} \leq x$ である $N \in \mathbb{N}$ が存在して，すべての $n \geq N$ で $f_n(x) = 0$ となるので $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$．したがって (f_n) は各点ごとに 0 に収束する．一方 f_n は $n \to \infty$ で非有界である．

より良い収束の概念を定義しよう．

定義 5.2 K を集合，$f_n : K \to \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）とする．関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq N, \forall\, x \in K : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

となるとき $f : K \to \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）に一様収束するという．$f_n \rightrightarrows f$ と表す．

この定義における重要な点は，すべての $x \in K$ に対して共通の N を選べるというところにある．

定理 5.3 $K \subset \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）とし，$f_n : K \to \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）を連続関数で，

$f : K \to \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）に一様収束する列とする．このとき f も連続である．

証明 $x \in K, \varepsilon > 0$ とする．(f_n) は一様収束するので，十分大きな $N \in \mathbb{N}$ が存在して，すべての $\xi \in K$ に対して

$$|f_N(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

となる．各 x と ε に応じて $\delta > 0$ を，すべての $|x - y| < \delta$ となる $y \in K$ に対して

$$|f_N(y) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

となるようにとる．f_N は連続と仮定しているので，上のようにすることが可能である．したがって，すべての $|x - y| < \delta$ となる $y \in K$ に対して

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

を得る．このようにして f が x で連続であることがわかり，$x \in K$ は任意であったので K 上連続であることが示せる． □

定義 5.4 集合 K 上の関数 $f : K \to \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）に対して

$$\|f\|_K := \sup\{|f(x)| : x \in K\}$$

と定義する．

補題 5.5 $\|\cdot\|_K$ は K 上の有界実数値（または複素数値）関数のなすベクトル空間のノルムである．

証明 f は有界なので $\|f\|_K < \infty$. 以下，ノルムの満たすべき性質を満たすことが確かめる．

(i) $\|f\|_K \geq 0 \quad (\forall\, f)$，さらに $\|f\|_K = 0 \Leftrightarrow \ K$ 上 $f \equiv 0$.

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \|\lambda f\|_K = \sup\{|\lambda f(x)| : x \in K\} \\ &= |\lambda| \sup\{|f(x)| : x \in K\} = |\lambda| \|f\|_K. \end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned}\|f+g\|_K &= \sup\{|f(x)+g(x)| : x\in K\}\\ &\le \sup\{|f(x)|+|g(x)| : x\in K\}\\ &\le \sup\{|f(y)| : y\in K\}+\sup\{|g(z)| : z\in K\}\\ &= \|f\|_K+\|g\|_K.\end{aligned}$$

(f, g の最大値を与える点は異なっていることもあることに注意.) □

定理 5.6 $f_n : K \to \mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$)が一様に $f : K \to \mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$)に収束するのは

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_K = 0$$

となるとき，またそのときに限る.

証明

$$\begin{aligned}f_n \rightrightarrows f &\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \ge N, x \in K : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \ge N : \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in K\} < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \ge N : \|f_n - f\|_K < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_K = 0.\end{aligned}$$ □

定理 5.7 $C_b^0(K) := \{f \in C^0(K) : \|f\|_K < \infty\}$ にノルム $\|\cdot\|_K$ を与えたものはバナッハ空間である．同様に $C_b^0(K, \mathbb{C})$ もバナッハ空間.

証明 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_b^0(K)$ を $\|\cdot\|_K$ に関するコーシー列とする.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \ge N : \|f_n - f_m\|_K < \varepsilon,$$

$$\text{したがって特に}\quad \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in K\} < \varepsilon.$$

これより，すべての $y \in K$ で $|f_n(y) - f_m(y)| < \varepsilon$，つまり $(f_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であることがわかる．$\mathbb{R}$ は完備なので $f(y)$ に収束する．上の不等式で m を無限大にすると

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \ge N : \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in K\} \le \varepsilon$$

となるので，すべての $y \in K$ と y と独立な N に対して $|f_n(y) - f(y)| \le \varepsilon$. ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_K = 0.$$

つまり $\|\cdot\|_K$ に関して f は (f_n) の極限である．定理 5.3 より関数 f は連続なので $C_b^0(K)$ が完備であることがわかる． □

系 5.8 **(ワイエルシュトラスの定理)** $f_n : K \to \mathbb{R}$ (または $\mathbb{C}$)を

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_K < \infty$$

となる関数とする．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は K 上一様に収束し，また各 $x \in K$ で $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ は絶対収束する．

証明　まず部分和 $F_m := \sum_{n=0}^{m} f_n$ が $\|\cdot\|$ に関してコーシー列であることを示す．$m \geq m'$ に対して

$$\|F_m - F_{m'}\|_K = \| \sum_{n=m'}^{m} f_n\|_K \leq \sum_{n=m'}^{m} \|f_n\|_K$$

を得る．$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_K$ は収束するので (F_m) はコーシー列．したがって定理 5.7 より $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は K 上一様に収束する．

絶対収束であることは $\Sigma|f_n(x)| \leq \Sigma\|f_n\|_K$ よりわかる． □

系 5.9 $z_0 \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ とし，ある $z_1 \neq z_0$ が存在して級数

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

が z_1 で収束するとする．

$r > 0$ に対して，$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ とおく．$0 < r < |z_1 - z_0|$ となる r に対して，上のべき級数は $B(z_0, r)$ 上一様絶対収束する．べき級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1}$$

も $B(z_0, r)$ 上絶対一様収束する．

証明　$z \in B(z_0, r)$ に対して

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n(z_1-z_0)^n|\frac{|z-z_0|^n}{|z_1-z_0|^n} \le |a_n(z_1-z_0)^n|\theta^n$$

を得る．ただしここで $\theta := \frac{r}{|z_1-z_0|} < 1$. $f(z_1)$ は収束するので，ある $m \in \mathbb{R}$ が存在して

$$|a_n(z_1-z_0)^n| \le m \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

したがって，

$$|a_n(z-z_0)^n| \le m\theta^n \quad (z \in B(z_0,r)).$$

これより，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n(z-z_0)^n\|_{B(z_0,r)}$$

は収束し，系 5.8 より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ が $B(z_0,r)$ 上一様絶対収束することがわかる．

同様に，$z \in B(z_0,r)$ に対して，

$$|na_n(z-z_0)^{n-1}| \le nm\theta^{n-1}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n\theta^{n-1}$ が収束することが商判定法よりわかり，$z \in B(z_0,r)$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ が収束することが系 5.8 により示される． □

定義 5.10 系 5.9 のべき級数 $f(z)$ に対して

$$R := \sup\{r : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ が } B(z_0,r) \text{ 上収束 }\}$$

を，べき級数 $f(z)$ の収束半径という．

定理 5.11 $D \subset \mathbb{R}$ とし，$f_n : D \to \mathbb{R}$ を連続微分可能（微分が連続）関数とする．

（i）$(f_n(z))$ が収束するような $z \in D$ が存在し，

（ii）微分 (f_n') のなす数列は D 上一様収束する

と仮定する．このとき，(f_n) は連続微分可能な関数 f に D 上一様収束する．

さらに

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \quad (\forall\, x \in D).$$

証明　$g(x)$ を $f'_n(x)$ の極限とする．f'_n は一様収束するので，$\eta > 0$ に対して以下の性質を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在する．

$$\forall\, n, m \geq N : \sup\{|f'_n(x) - f'_m(x)| : x \in D\} < \eta \tag{1}$$

$$\text{したがって}\ \sup\{|f'_n(x) - g(x)| : x \in D\} \leq \eta \quad \forall n \geq N. \tag{2}$$

さらに，任意の $x \in D$，任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して，平均値の定理より

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| \leq |x - z| \sup_{\xi\in D} |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \tag{3}$$

を得る．したがって

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(z) - f_m(z)| + |x - z| \sup_{\xi\in D} |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|.$$

(i) と (1) より (f_n) は $\|\cdot\|_D$ に関してコーシー列であることがわかる．よって，定理 5.3 より，数列 (f_n) はある連続関数 f を極限とする．

特に上の考察より (i) がすべての $z \in D$ に対して成立する．

(3) において，$m \to \infty$ とすると (2) より

$$|f_N(x) - f(x) - (f_N(z) - f(z))| \leq |x - z|\eta \tag{4}$$

を得る．微分可能性の特徴づけより (定理 2.2 を見よ)，η によって定まる N と x に対して，$\delta > 0$ が存在して

$$|f_N(x) - f_N(z) - (x - z)f'_N(x)| \leq \eta|x - z| \qquad (|x - z| < \delta) \tag{5}$$

を満たす．

(2), (4), (5) より

$$|f(x) - f(z) - g(x)(x - z)| \leq 3\eta|x - z| \quad (|x - z| < \delta)$$

を得る．これがすべての $x \in D$ と $|x - z| < \delta$ となるすべての z で成立するので，微分可能性の特徴づけより $f'(x)$ が存在し

$$f'(x) = g(x).$$

□

定理 5.11 のより強い形を以下のように示すことができ，後で積分を導入するときにこれを使う．

定理 5.12 $f_n, g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ を関数とする．f_n は連続で，各 n に対して可算集合 $D_n \subset [a,b]$ が存在し，すべての $x \in I \backslash D_n$ で

$$f_n'(x) = g_n(x)$$

であるとする．さらに次を仮定する．

（i） $f_n(z)$ が収束するような $z \in [a,b]$ が存在する．

（ii） $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $[a,b]$ 上一様に収束する．

このとき f_n も $[a,b]$ 上一様にある連続関数 f に収束し，すべての $x \in I \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ に対して $f'(x)$ が存在して

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

となる．

証明は定理 5.11 とほぼ同様であるが，平均値の定理のかわりに以下の補題を使う．

補題 5.13 $f : I \to \mathbb{R}$ を $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$ 上連続とする．I の可算部分集合 D が存在して，f は $I \backslash D$ 上微分可能で

$$f'(x) \le M \quad (\forall\, x \in I \backslash D)$$

であるとき

$$f(b) - f(a) \le M(b-a) \tag{6}$$

が成立する．

証明　任意の $\eta > 0$ に対して

$$f(b) - f(a) \le M(b-a) + \eta(b-a+1)$$

が成立することを示せばよい．この不等式の左辺は η によらないので，不等

式(6)がただちに従う．

$n \mapsto \rho_n (n \in \mathbb{N})$ を D の番号付けとする．

$$A := \Big\{\xi \in I : a \le \zeta < \xi \text{となるすべての} \zeta \text{で}$$
$$f(\zeta) - f(a) \le M(\zeta - a) + \eta(\zeta - a) + \eta \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}\Big\}$$

とおく．$a \in A$ なので，A は空集合ではない．$c := \sup A$ とおく．f の連続性より $c \in A$ であり，さらに

$$f(c) - f(a) \le M(c - a) + \eta(c - a) + \eta \sum_{\rho_n < c} 2^{-n} \tag{7}$$

が成立する．$c = b$ を示せば不等式(6)が証明できる．$c = b$ を示すために $c < b$ と仮定する．以下の 2 つの場合を考察する．

場合 1 $c \notin D$ となる場合．$f'(c)$ が存在し微分の特徴づけ(定理 2.2)より，$c + \delta \le b$ となる $\delta > 0$ が存在し，$c \le \zeta \le c + \delta$ となるすべての ζ で

$$f(\zeta) - f(c) - f'(c)(\zeta - c) \le \eta(\zeta - c).$$

これより

$$f(\zeta) - f(c) \le f'(c)(\zeta - c) + \eta(\zeta - c) \le M(\zeta - c) + \eta(\zeta - c)$$

を得，(7)より

$$f(\zeta) - f(a) \le M(\zeta - a) + \eta(\zeta - a) + \eta \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}.$$

したがって $c \le \zeta \le c + \delta$ となる $\zeta \in A$．これは c の定義に矛盾する．つまり場合 1 のときは $c = b$ でなくてはいけない．

場合 2 $c \in D$ の場合．$c = \rho_m$ とする．f の連続性より，$c + \delta \le b$ となる $\delta > 0$ が存在し，すべての $c \le \zeta \le c + \delta$ となる ζ に対して

$$|f(\zeta) - f(c)| \le \eta 2^{-m}$$

を満たす．(7)より再び，$c < \zeta < c + \delta$ に対して

$$f(\zeta)-f(a)\le M(c-a)+\eta(c-a)+\eta\sum_{\rho_n\le c}2^{-n}$$
$$\le M(\zeta-a)+\eta(\zeta-a)+\eta\sum_{\rho_n<\zeta}2^{-n}.$$

これは c の定義に矛盾．補題 5.13 の証明が完結した． □

定理 5.11 に戻り，いくつかの結果を導く．

定義 5.14 $f\in C^k(D)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ $D\subset\mathbb{R}$ に対して

$$\|f\|_{C^k(D)}:=\sum_{i=0}^{k}\|f^{(i)}\|_D \text{（ここで } f^{(0)}:=f),$$
$$C_b^k(D):=\{f\in C^k(D):\|f\|_{C^k(D)}<\infty\}.$$

$f\in C^{k,\alpha}(D)$ $(k=0,1,2,\ldots)$, $0<\alpha\le 1$, $D\subset\mathbb{R}$ に対して

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(D)}:=\|f\|_{C^k(D)}+\sup_{\substack{x,y\in D\\ x\ne y}}\frac{|f^{(k)}(x)-f^{(k)}(y)|}{|x-y|^\alpha},$$
$$C_b^{k,\alpha}(D):=\{f\in C^{k,\alpha}(D):\|f\|_{C^{k,\alpha}(D)}<\infty\}.$$

補題 5.15 $\|\cdot\|_{C^k(D)}$，$\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(D)}$ はそれぞれ $C_b^k(D)$，$C_b^{k,\alpha}(D)$ 上のノルムを定義する．

証明は補題 5.5 を参考にすれば初等的．

定理 5.16 $k=0,1,2,\ldots$ で $(C_b^k(D),\|\cdot\|_{C^k(D)})$ はバナッハ空間である．

証明　$k=1$ の場合だけを扱う．$k=0$ は定理 5.7 であり，一般の場合は帰納法で簡単に証明できる．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\|\cdot\|_{C^1(D)}$ に関するコーシー列とする．すなわち (f_n), (f_n') が $\|\cdot\|_D$ に関してコーシー列である．定理 5.7 より $C_b^0(D)$ はバナッハ空間であり，極限として関数を得る．これより

$$f_n\rightrightarrows f,\quad f_n'\rightrightarrows g.$$

定理 5.11 より（ここでは定理 5.11 の条件 (i) より強い条件を満たしているこ

とに注意する）

$$f' = g$$

を得，$f \in C_b^1(D)$ で $\|f_n - f\|_{C^1(D)} \to 0$．したがって $C_b^1(D)$ は完備で，したがってバナッハ空間である． □

定理 5.17 $k = 0, 1, 2, \ldots, 0 < \alpha \leq 1$ で $(C_b^{k,\alpha}(D), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(D)})$ はバナッハ空間である．

証明 $k = 0$ の場合のみ扱う．一般の場合は定理 5.16 を用いると帰納的に証明できる．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}}(D)$ に関するコーシー列とする．このとき $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\|\cdot\|_D$ に関するコーシー列でもあり，定理 5.16 より，数列 (f_n) は一様に関数 f に収束する．さらに $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, n, m \geq N$:

$$\sup_{\substack{x,y\in D\\ x\neq y}} \frac{|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(y) - f_m(y))|}{|x-y|^\alpha} < \varepsilon\,.$$

すべての $x, y \in D$, $x \neq y$ に対して，m を ∞ にすると

$$\frac{|f_n(x) - f(x) - (f_n(y) - f(y))|}{|x-y|^\alpha} \leq \varepsilon\,.$$

これは，まず

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \varepsilon + \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

を意味し，したがって $f \in C_b^{0,\alpha}(D)$．さらに $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^{0,\alpha}(D)} = 0$ も導かれ，ゆえに $C_b^{0,\alpha}(D)$ は完備であり，つまりバナッハ空間である． □

いよいよ次を定義する．

定義 5.18 $K \subset \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）とし，$f_n : K \to \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）$(n \in \mathbb{N})$ を関数とする．

a）関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が K 上一様有界とは

$$\Leftrightarrow\; \exists\, M \in \mathbb{R}\; \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in K : |f_n(x)| \leq M$$

（したがって特にすべての n で：$\|f_n\|_K \leq M$）.

b）関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が K 上同等連続とは

$$\Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall\,n\in\mathbb{N},\ |x-y|<\delta となる\ \forall\,x,y\in K:$$
$$|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon. \tag{8}$$

関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が K 上同等連続であれば，特にすべての f_n は一様連続である．(8)式で大切なのは，δ が n によらないようにとれることである．

定理 5.19 I を $\mathbb{R}$ の区間とし，

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C^k(I), k\ge 1\quad (または\quad \subset C^{k,\alpha}(I), 0<\alpha\le 1, k\ge 0),$$
$$\|f_n\|_{C^k(I)}\ (または\ \|f_n\|_{C^{k,\alpha}(I)})\le M\quad (\forall\,n)$$

とする．このとき (f_n) は一様有界，同等連続である．

証明 (f_n) が一様有界であることは明らか．同等連続であることを示すには $k=1$ と $k=0, 0<\alpha\le 1$ の場合を考えれば十分である．まず，$(f_n)\subset C^1(I)$, $\|f_n\|_{C^1(I)}\le M$ とする．平均値の定理より，すべての $x,y\in I$ とすべての $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$|f_n(x)-f_n(y)|\le|x-y|\sup_{\xi\in I}|f_n'(\xi)|\le M|x-y|$$

を得，同等連続であることがわかる．

同様に $(f_n)\subset C^{0,\alpha}(I)$, $\|f_n\|_{C^{0,\alpha}(I)}\le M$ とする．任意の $x,y\in I$ と，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$|f_n(x)-f_n(y)|\le M|x-y|^\alpha$$

であり，したがって同等連続が示せた．　□

定理 5.20（アルツェラ・アスコリ（Arzelà-Ascoli）の定理） I を $\mathbb{R}$ の有界閉区間，$f_n: I\to\mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）を一様有界，同等連続な関数列とする．このとき関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様収束する部分列を持つ．

証明 I で稠密な点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える．すべての $x\in I$ は (x_n) の部分列の極限となる．$I=[0,1]$ の場合は，例えば以下のような点列をとればよい．

$$\left(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8},\frac{1}{16},\ldots\right).$$

(f_n) は一様有界なので，特に $|f_n(x_1)|$ は n によらずに有界．したがって (f_n) の部分列 $(f_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ で $f_{1,n}(x_1)$ が収束するものが存在する．これを繰り返すと，$(f_{k-1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ で $f_{k,n}(x_k)$ が収束するものを得る．$(f_{k,n})$ は $(f_{k-1,n})$ の部分列なので，帰納的に $(f_{k,n}(x_1)),\ldots,(f_{k,n}(x_{k-1}))$ が収束することが示せる．対角列 $(f_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ をとると，すべての固定した $i\in\mathbb{N}$ に対して $k\to\infty$ で $f_{kk}(x_i)$ が収束する．実際，$k\geq i$ であれば $f_{kk}\in(f_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ で，$f_{i,n}(x_i)$ は定義より収束するので，特に部分列 $f_{kk}(x_i)$ は収束する．この議論の仕方を**カントール（Cantor）の対角線論法**という．$(f_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ が $\|\cdot\|_I$ に関するコーシー列であることを示す．$\varepsilon>0$ とせよ．

1) $\delta>0$ を

$$|x-y|<\delta \text{ となる } \forall\, x,y\in I,\, \forall k\in\mathbb{N}:|f_{kk}(x)-f_{kk}(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

となるようにとる．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，したがってその部分列 $(f_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ は同等連続なので，このようにすることが可能である．

2) $M\in\mathbb{N}$ を

$$\forall\, x\in[0,1]\ \exists\, i\in\{1,\ldots,M\}:|x-x_i|<\delta$$

となるようにとる．ここで I が有界であることを使った．

3) $N\in\mathbb{N}$ を

$$\forall\, i\in\{1,\ldots,M\},n,m\geq N:|f_{nn}(x_i)-f_{mm}(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

となるようにとる．M はすでに選んだので，有限個の点 $x_i,\, i=1,\ldots,M$ をどうとるかという問題であるが，$(f_{nn}(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ がすべての i で収束するので，このような N が存在する．N は M の選び方によって決まり，M は δ の選び方によって決まり，δ は ε の選び方によって決まる．すべての $x\in[0,1]$ とすべての $n,m\geq N$ に対して

$$|f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| \le |f_{nn}(x) - f_{nn}(x_i)| + |f_{nn}(x_i) - f_{mm}(x_i)| \\ + |f_{mm}(x_i) - f_{mm}(x)| \\ < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

ここで $x_i (1 \le i \le M)$ は (2) で選んだもの．N は x によらないので，

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n, m \ge N : \sup\{|f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| : x \in [0,1]\} < \varepsilon$$

を得る．

このようにして $(f_{nn})_{n \in \mathbb{N}}$ がコーシー列であることが示せた．　□

系 5.21　$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^k(I)$, $k \ge 1$ または $\subset C^{k,\alpha}(I)$, $k \ge 0$, $0 < \alpha \le 1$ を

$$\|f_n\|_{C^k(I)} \le M \text{ または } \|f_n\|_{C^{k,\alpha}(I)} \le M$$

となるものとする．ここで I は $\mathbb{R}$ の有界閉区間である．このとき $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は一様収束部分列を持つ．

証明　定理 5.19 と定理 5.20 からの直接の帰結．　□

注意　1) 類似の議論で，例えば $B(z_o, r) \subset \mathbb{C}$, $0 < r < \infty$ 上の一様有界，同等連続関数の列 (f_n) のアルツェラ・アスコリの定理が証明できる．

2) アルツェラ・アスコリの定理において区間 I が有界であるという条件が本質的であることを，例によって見よう．

$$f_n(x) := \begin{cases} \sin x & 2\pi n \le x \le 2\pi(n+1) \\ 0 & \text{それ以外の点で} \end{cases}$$

とおく．関数列 f_n は一様有界，同等連続で，各点ごとに 0 に収束する．しかし，一様には収束しない．

5 章の演習

1) 以下の $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ のうちどれが $n \to \infty$ で収束する

か？ 収束する場合，その極限は何か？ 収束が一様であるような区間を求めよ．

a) $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$.

b) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

c) $f_n(x) = \frac{n^2x}{1+nx^2}$.

2) 以下の $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のうちどれが一様収束するか？ また，そのとき極限は何か？

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \begin{cases} |x-n|-1 & n-1 \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{それ以外の点で}. \end{cases}$

b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{1}{1+(\frac{x}{n})^2}$.

c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$.

d) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}\sin x & 2\pi n \leq x \leq 2\pi(n+1) \\ 0 & \text{それ以外の点で}. \end{cases}$

3) $f_n(x) = x^n$ は $[a,b] \subset (0,1)$ 上一様収束することを示せ．

4) $f : D \to \mathbb{R}$ を $D \subseteq \mathbb{R}$ 上の関数，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ を 0 に収束する数列とする．$x \in D$ に対して $f_n(x) := a_n f(x)$ とおく．このとき $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が 0 に D の各点ごとに収束すること，さらに f が D 上有界なとき，またそのときに限り一様収束することを示せ．

5) a) $g_n : K \to \mathbb{R}$ を g に一様収束する関数列とする．また $f : K \to \mathbb{R}$ を有界な関数とするとき $g_n f$ は gf に一様収束することを示せ．

b) a)と同様にK上$g_n \rightrightarrows g$とし,

$$\forall x \in K, n \in \mathbb{N} : |g_n(x)| \geq c > 0$$

とする．このときK上

$$\frac{1}{g_n} \rightrightarrows \frac{1}{g}$$

を示せ.

6) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$に対して,

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$$

とおく．$\|\cdot\|$は$C^\infty(\mathbb{R})$上のノルムとなっているか？（ヒント：

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \leq 0 \\ 0 & \text{それ以外の点で} \end{cases}$$

を考えよ（もちろん$f \in C^\infty(\mathbb{R})$であることを確かめる必要がある.)

7) $0 < \beta < \alpha \leq 1$とし，$I = [a, b]$を$\mathbb{R}$の有界閉区間，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\alpha(I)$は，ある定数$M$が存在して

$$\|f_n\|_{C^\alpha(I)} \leq M$$

となるものとする．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$の部分列がノルム$\|\cdot\|_{C^\beta(I)}$に関して収束することを示せ.

8) 多項式$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，つまり$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ $(a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$の形の関数全体の集合を$\mathcal{P}$とし，$p \in \mathcal{P}$に対して,

$$\|p\| := \sup\{|p(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$$

とおく.

a) $\|\cdot\|$は$\mathcal{P}$上のノルムであることを示せ.

b) $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ はバナッハ空間か？

9) $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続微分可能関数とする．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が各点ごとに，ある関数 f に収束すると仮定する．以下の主張のうち正しいものはあるか？ それはどれか？

a) f は連続微分可能．

b) $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は各点ごとに収束する．

c) f が連続微分可能であれば，任意の $x \in [a, b]$ で $\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$．

d) f が連続微分可能で，任意の $x \in [a, b]$ で $\lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ が存在するとき，$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$ がすべての x で成立する．

第 6 章

積分と常微分方程式

［ 連続関数 g は，g の微分が存在して関数 f と一致するとき，f の原始関数であるという．原始関数とはすなわち不定積分のことである．積分を計算するための基本公式を導く．バナッハの不動点定理を用いて，常微分方程式(ODE)の局所的な解，または積分の存在に関するピカール・リンデレーフ(Picard-Lindelöf)の定理を示す． ］

定義 6.1 I を $\mathbb{R}$ の閉区間，$f : I \to \mathbb{R}$ を関数とする．連続関数 $g : I \to \mathbb{R}$ は，I の可算集合 D が存在して，すべての $\xi \in I \backslash D$ で g が ξ に関して微分可能で $g'(\xi) = f(\xi)$ となるとき I における f の原始関数であるという．このとき f は I 上(リーマン(Riemann))積分可能であるという．

注意 12 章より，ルベーグ(Lebesgue)積分の理論を展開し，より一般的な積分の概念を導入する．

補題 6.2 g_1, g_2 が I における f の原始関数であれば $g_1 - g_2$ は I 上定数である．

証明 補題 5.13 からの直接の帰結． □

注意 $f : I \to \mathbb{R}$ が原始関数を持つかどうかを確かめるには I の有界閉部分区間で考えればよい．実際，

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$$

となる有界閉な J_n で，すべての n に共通の $x_0 \in J_n$ が存在するものをとる．g_n を J_n における f の原始関数で $g_n(x_0) = 0$ となるものとする．補題 6.2 より関数 g を

$$g(x) := g_n(x) \quad x \in J_n$$

で定めることができ，これは I 上の f の原始関数である．

定義 6.3 関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は階段関数の列が一様収束するときの極限であるとき許容関数という．ここで $t : I \to \mathbb{R}$ が階段関数であるとは，その上で t が定数になるような有限個の区間の直和に I がなることである．

補題 6.4 I を $\mathbb{R}$ の有界閉区間，$f : I \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき f は許容関数である．

証明 $\varepsilon = \frac{1}{n}$ とする．ε に対して $\delta > 0$ を，$|x-y| < \delta$ となるすべての $x, y \in I$ で $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となるように選ぶ．$I = [a, b]$，m を $a + m\delta < b$ となる最大の自然数とする．$0 \le \mu \le m$ となる整数 μ に対して

$$x_\mu := a + \mu\delta \ , \ x_{m+1} := b$$

とおく．階段関数を

$$t_n(x) = f(x_\mu) \quad x_\mu \le x < x_{\mu+1}, \quad t_n(b) = f(b) \tag{1}$$

で定めると，すべての $x \in [a, b]$ で $|x - x_\mu| < \delta$ となる x_μ があるので

$$\begin{aligned} |f(x) - t_n(x)| &= |f(x) - f(x_\mu)|, \ (x_\mu \text{ を(1)のようにとると}) \\ &< 1/n. \end{aligned}$$

したがって $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様に f に収束する．□

定理 6.5 I を閉区間，$f : I \to \mathbb{R}$ を許容関数とする．このとき f は I 上の原始関数を持つ．

証明 補題 6.2 の後の注で，I は有界と仮定してよいことを注意した．まず，f が階段関数の場合を考える．$I = [a, b]$, $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$, $f(\xi) = c_i$ $(x_i \le \xi < x_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1)$ とする．

$$g(\xi) := c_i(\xi - x_i) + \sum_{\nu=0}^{i-1} c_\nu(x_{\nu+1} - x_\nu) \ (\ x_i \le \xi < x_{i+1})$$

とおくと g は連続で $x \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$ で $g'(\xi) = f(\xi)$，したがって g は f の

原始関数となる．

一般の許容関数 f の場合は，階段関数 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の列で一様に f に収束するものがある．すでに，すべての t_n が原始関数 g_n を持つことは示したので，これを $g_n(a)=0$ と標準化しておく．定理 5.12 より，可算集合 D_n が存在して $I\backslash D_n$ 上 $g_n'=t_n$ であり，g_n は連続関数 g に一様収束し，$I\backslash\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_n$ 上 $g'=f$ となる．ゆえに g は f の原始関数． □

定理 6.6 $f:I\to\mathbb{R}$ は連続で原始関数 g を持つとする．このとき g は I 上微分可能で，すべての $x\in I$ で $g'(x)=f(x)$.

証明 補題 5.13 を関数 $\phi(h)=g(x+h)-f(x)h$ に適用すると

$$|g(x+h)-g(x)-f(x)h|\leq h\sup_{|\eta|\leq|h|}|f(x+\eta)-f(x)|$$

を得る．f は連続なので，すべての $x\in I$ で

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(h\sup_{|\eta|\leq|h|}|f(x+\eta)-f(x)|)\\&=\lim_{h\to 0}\sup_{|\eta|\leq|h|}|f(x+\eta)-f(x)|=0.\end{aligned}$$

したがって，定理 2.2 よりすべての $x\in I$ で $g'(x)=f(x)$ が示せる． □

定義 6.7 g を I 上の f の原始関数とし $x_1,x_2\in I$ とする．x_1 から x_2 までの f の積分を

$$\int_{x_1}^{x_2}f(\xi)d\xi:=g(x_2)-g(x_1)$$

で定義する．補題 6.2 よりこの表現は原始関数 g のとり方によらないことに注意しよう．

記号 g が f の原始関数であるとき，可算個の点で g は微分可能でないか，または g' が f に一致していないという可能性はあるが，$g'=f$ と書く．

補題 6.8 I を $\mathbb{R}$ の有界閉区間，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を連続関数，$\phi:I\to\mathbb{R}$ を許容関数とする．このとき $f\phi:I\to\mathbb{R}$ も許容関数である．

証明　$(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を ϕ に一様収束する階段関数の列とする．$M := \sup\{\|f\|_I, \|t_n\|_I; n \in \mathbb{N}\} < \infty$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ と $\delta > 0$ が存在し

$$\forall\, n \geq N, \|t_n - \phi\|_I < \frac{\varepsilon}{2M}, |x-y| < \delta \text{ となる } \forall\, x, y \in I \ : \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

となる．$I = [a,b]$, $m \in \mathbb{N}$ を $a + m\delta < b$ となる最大の自然数とする．$0 \leq \mu \leq m$ となる自然数 μ に対して $x_\mu := a + \mu\delta$, $x_{m+1} = b$ とおく．

$$\tau_n(x) := t_n(x) f(x_\mu) \quad (x_\mu \leq x < x_{\mu+1}), \quad \tau_n(b) := t_n(b) f(b). \tag{2}$$

と定義すると，(2)式の x_μ に対して

$$\begin{aligned}
&|\tau_n(x) - f(x)\phi(x)| \\
&\leq |t_n(x)(f(x_\mu) - f(x))| + |f(x)(t_n(x) - \phi(x))|, \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad (n \geq N).
\end{aligned}$$

したがって．階段関数の列 $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $f\phi$ に一様収束する．すなわち $f\phi$ は許容関数．　□

定理 6.9（置換積分）　I, J を閉区間，h を I のある許容関数の原始関数で $h(I) \subset J$ となるものとする．$f : J \to \mathbb{R}$ が連続であるとき，すべての $x_1, x_2 \in I$ で

$$\int_{x_1}^{x_2} f(h(\xi))h'(\xi)d\xi = \int_{h(x_1)}^{h(x_2)} f(y)dy. \tag{3}$$

証明　補題 6.8 より関数 $f(h(\xi))h'(\xi)$ は $[x_1, x_2]$ 上の許容関数．g を f の原始関数とする．連鎖律より $g(h(\xi))$ は $f(h(\xi))h'(\xi)$ の原始関数．したがって (3)式の左辺も右辺もともに

$$g(h(x_2)) - g(h(x_1))$$

に等しい．　□

定理 6.10（部分積分）　f, g を閉区間 I 上の許容関数の原始関数とし，$x_1, x_2 \in$

I とする．このとき

$$\int_{x_1}^{x_2} f(\xi)g'(\xi)d\xi = f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} f'(\xi)g(\xi)d\xi\,.$$

証明　補題 6.8 より $fg' + f'g$ は $[x_1, x_2]$ 上許容関数．したがって原始関数を持ち，積の微分公式より原始関数は gf. □

補題 6.11（積分の単調性） $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ を原始関数 g_1, g_2 を持つ許容関数とする．すべての $x \in [a,b]$ で

$$f_1(x) \leq f_2(x)$$

であれば

$$g_1(b) - g_1(a) \leq g_2(b) - g_2(a)$$

が成り立つ．

証明　補題 5.13 よりの直接の帰結． □

定理 6.12（平均値の定理） $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．ある $x \in [a,b]$ が存在し

$$\int_a^b f(\xi)d\xi = f(x)(b-a).$$

証明　g を f の原始関数とし，

$$\lambda := \inf\{f(\xi) : \xi \in [a,b]\},$$
$$\mu := \sup\{f(\xi) : \xi \in [a,b]\}$$

とする．

$\lambda\xi$, $\mu\xi$ はそれぞれ定数関数 λ, μ の原始関数なので，補題 6.11 より

$$\lambda(b-a) \leq g(b) - g(a) = \int_a^b f(\xi)d\xi \leq \mu(b-a).$$

したがって $\lambda \leq m \leq \mu$ となる m が存在して

$$\int_a^b f(\xi)d\xi = m(b-a).$$

中間値の定理 1.14 より，ある $x \in [a,b]$ が存在して $f(x) = m$. □

より一般に以下が成立する．

定理 6.13 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を許容関数とする．

$$\left|\int_a^b f(\xi)d\xi\right| \le \int_a^b |f(\xi)|d\xi \le (b-a)\sup_{\xi\in[a,b]} |f(\xi)|.$$

証明　簡単にわかるように $|f|$ も許容関数である．実際，$(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様に収束しているとき $(|t_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ は $|f|$ に一様に収束する．なぜなら，$||t_n|-|f|| \le |t_n - f|$ だからである．g を f の原始関数，h を $|f|$ の原始関数とする．補題 6.11 を $f_1 = \pm f$，$f_2 = |f|$ に適用すると，

$$|g(b)-g(a)| \le h(b)-h(a) \le (b-a)\sup_{\xi\in[a,b]} |f(\xi)|.$$

□

定理 6.14 I を有界閉区間，$f_n : I \to \mathbb{R}$ を許容関数で I 上 $f_n \rightrightarrows f$ となるとする．このとき，任意の $x_1, x_2 \in I$ に対して

$$\int_{x_1}^{x_2} f_n(\xi)d\xi \to \int_{x_1}^{x_2} f(\xi)d\xi.$$

証明　カントールの対角線論法より，f が許容関数であることがわかる．実際，階段関数 $(t_{mn})_{m\in\mathbb{N}}$ の列が f_n に一様収束するとき，部分列 $(t_{m(n),n})_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束する．証明は以下の通りである．

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \ge N : \|f_n - f\|_I < \frac{\varepsilon}{2}.$$

さらに，任意の n に対して，ある $m(n)$ が存在して

$$\|t_{m(n),n} - f_n\|_I < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$n \ge N$ で $\|t_{m(n),n} - f\|_I < \varepsilon$．したがって f は許容関数．定理 5.12 より証明が完了する． □

定理 6.15 I, f_n を定理 6.14 と同様なものとする. $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_I < \infty$, $F := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (系 5.8 よりこのような F が存在する) とおくと,

$$\int_{x_1}^{x_2} F(\xi)d\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_1}^{x_2} f_n(\xi)d\xi$$

であり, これは絶対収束する.

証明 定理 6.14 より収束することがわかり. 定理 6.13 よりさらにこれが絶対収束であることがわかる. □

ここで簡単に積分と面積の関連を述べる.

そのために $f: I \to \mathbb{R}$ を区間 $I = [a,b]$ 上の関数とする. 面積の符号について考慮しなくて済むように $x \in I$, $f(x) \geq 0$ と仮定しよう.

まず定理 6.5 の証明と同様, f を階段関数とする. I の部分区間 $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ があって

$$f(\xi) = c_i \ (\ x_i < \xi < x_{i+1}, i = 0, \ldots, n-1).$$

仮定より, すべての $c_i \geq 0$. さらに定理 6.5 の証明と同様に

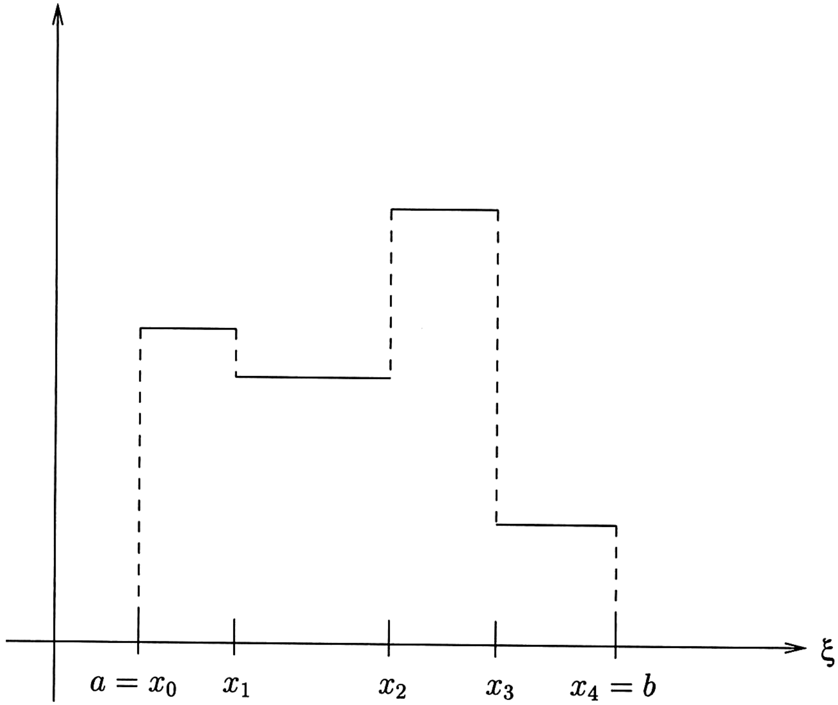
$$g(\xi) := c_i(\xi - x_i) + \sum_{\nu=0}^{i-1} c_\nu(x_{\nu+1} - x_\nu) \ (\ x_i \leq \xi < x_{i+1})$$

は f の(連続な)原始関数である.

簡単な幾何的考察により ξ 軸と f のグラフで囲まれた図形(次ページの図のように高さの異なる階段関数を垂直な線分で結ぶ)の面積が $g(b) - g(a)$ に等しいことがわかる.

任意の非負許容関数 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ に対しては ξ 軸と f のグラフで囲まれた図形の面積を, f の原始関数 g を用いて $g(b) - g(a)$ で定義するのが自然であろう. 定理 6.5 の証明の中で見たように, f に $[a,b]$ 上で一様収束する階段関数 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の列に対して, 対応する原始関数の列が f の原始関数に一様に収束するので, この定義は道理にかなっている.

歴史的には, もちろん上の説明とは逆方向に進行した. つまり $[a,b]$ 上の f の定積分が ξ 軸と f のグラフで囲まれた図形の面積で定義され, いわゆる**微分積分学の基本定理**が導かれた. 微分積分学の基本定理とは連続関数の原始



関数の微分が，再びもとの関数になるというものである．我々は，この微分積分学の基本定理を積分の定義とし，積分と面積の関係を導いた．

次に，ある区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の

$$f'(x) = \phi(x, f(x)) \tag{4}$$

の形の**常微分方程式**(ODE)を調べたい．ここで $\phi(x, y)$ は二つの変数の双方に関して連続であるとする．より正確に述べると，ϕ は $x \in I$ に関して連続，かつある $J \subset \mathbb{R}$ で $y \in J$ に関して連続とする．I 上の連続関数 f が，すべての $x \in I$ で $f(x) \in J$ であり，すべての $\xi_1, \xi_2 \in I$ で

$$f(\xi_2) - f(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \phi(\xi, f(\xi)) d\xi \tag{5}$$

のとき，(4)の I 上の解である．連続な f に対して $\varphi(x) := \phi(x, f(x))$ は x に関して連続なので，これは定理 6.6 よりの結果である．

ODE（常微分方程式）(4)の初期値問題を見る．つまり与えられた $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ に対して

$$f'(x) = \phi(x, f(x)) \tag{6}$$

の解で $f(x_0) = y_0$ となるものを見つけたい．

このような解はピカール・リンデレーフ(Picard-Lindelöf)の定理により与えられる．

定理 6.16 $\phi(x, y)$ を $|x - x_0| \leq \rho$, $|y - y_0| \leq \eta$ で連続で，この範囲の x, y に対して

$$|\phi(x, y)| \leq M \tag{7}$$

となるものとする．さらに $\phi(x,y)$ は y に関してリプシッツ連続，つまり，ある $L < \infty$ が存在して，$|x - x_0| \leq \rho$, $|y_1 - y_0| \leq \eta$, $|y_2 - y_0| \leq \eta$ であれば

$$|\phi(x, y_1) - \phi(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{8}$$

とする．

このとき，ある $h > 0$ が存在して(6)は $[x_0 - h, x_0 + h] \cap I$ で唯一つの解を持つ．

証明 (5)で $\xi_2 = x$, $\xi_1 = x_0$ とする．$I' := [x_0 - h, x_0 + h] \cap I$ で積分方程式

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(\xi, f(\xi)) d\xi \tag{9}$$

を解く必要がある．

バナッハの不動点定理 4.7 を

$$A := \{f \in C^0(I') : \|f - y_0\|_{C^0(I')} \leq \eta\}$$

に適用してこれを解こう．ここでパラメーター $h > 0$ を十分小さくとって

$$hM \leq \eta, \tag{10}$$

$$\theta := hL < 1 \tag{11}$$

となるようにしておく．$H(f)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} \phi(\xi, f(\xi))d\xi$ とおき，上のように選んだ h, A に対して，H が定理 4.7 の条件を満たすことを確かめる．実際，H はバナッハ空間 $C^0(I')$ の閉部分集合 A を自分自身に写す．つまり，$f \in A$ であれば

$$\begin{aligned}
\|Hf - y_0\|_{C^0(I')} &= \max_{x \in I'} \left|\int_{x_0}^{x} \phi(\xi, f(\xi))d\xi\right| \\
&\leq h \max_{\substack{\xi \in I' \\ |y - y_0| \leq \eta}} |\phi(\xi, y)| \\
&\qquad (f \in A \text{ だから } \xi \in I' \text{ で } |f(\xi) - y_0| \leq \eta \text{ なので}) \\
&\leq hM \\
&\leq \eta \quad ((10) \text{ より}).
\end{aligned}$$

また，H は縮小性も満たす．つまり $f, g \in A$ に対して

$$\begin{aligned}
\|Hf - Hg\|_{C^0(I')} &= \max_{x \in I'} \left|\int_{x_0}^{x} \{\phi(\xi, f(\xi)) - \phi(\xi, g(\xi))\}d\xi\right| \\
&\leq hL \max_{\xi \in I'} |f(\xi) - g(\xi)| \quad ((8) \text{ より}) \\
&= \theta \|f - g\|_{C^0(I')}
\end{aligned}$$

で，(11) より $\theta < 1$.

したがってバナッハの不動点定理より

$$H : A \to A$$

は唯一つの不動点 f を持ち，この不動点 f が求める (9) の解となる．　□

3 章ですでに ODE の例を見た．後続の章でさらに多くの例を見る．ここでは，定理 3.8 より

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \gamma f(x) \quad (\gamma \in \mathbb{R}) \\
f(0) &= y_0
\end{aligned}$$

の唯一つの解が

$$f(x) = y_0 e^{\gamma x}$$

で与えられることを思い出しておく．

6 章の演習

1) $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ を連続，$0 \leq x \leq b$ とする．このとき

$$\int_0^x \left(\int_0^y f(\xi) d\xi \right) dy = \int_0^x (x - y) f(y) dy$$

を示せ．

（ヒント：左辺の積分を $\varphi(y) \equiv 1, \psi(y) = \int_0^y f(\xi) d\xi$ とを用いて

$$\int_0^x \varphi(y) \psi(y) dy$$

と書き，部分積分をせよ．）

2) $\int_a^b x e^x dx, \int_a^b x^2 e^x dx$ を計算し，$\int_a^b x^n e^x dx, n \in \mathbb{N}$ に関する漸化式を求めよ．

3) $\lambda \in \mathbb{R}$ がどのような値のとき $\sin^\lambda(x)$ は $(0, \pi)$ で可積分となるか？

$$\int_0^\pi \sin^n(x) dx \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x}$$

を計算せよ．

4)

$$\int_{-1}^1 \frac{x + 1}{x^2 - 2} dx$$

を計算せよ．

5)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-2}^{2}\frac{dx}{1+x^{2n}}$$

を計算せよ．

6) $\varphi,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ を微分可能とし，$f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ は連続，

$$\alpha\le\varphi(x)<\psi(x)\le\beta\quad\forall x\in[a,b]$$

とする．

$$F(x):=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(\xi)d\xi$$

が $[a,b]$ 上微分可能であることを示せ．

7) a) 可積分関数 $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，$[0,1]$ 上極限 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ が存在するが

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1 f(x)dx$$

となるものを見つけよ．

b) 可積分関数 $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で極限 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ が $[0,1]$ 上存在するが，可積分でないものを見つけよ．

8) 微分方程式

$$f'(x)=f(x)+c$$

$(c\in\mathbb{R},\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ のすべての解を求めよ．

9) $I,J\subset\mathbb{R}$ を 開区間で $0\in J$ とする．$\psi:I\to\mathbb{R}$ は連続，$y_0\in I$ とせ

よ．$f : J \to I$ が初期条件

$$f(0) = y_0$$

の微分方程式

$$f' = \psi(f)$$

の解であるとは，

$$\frac{df}{dx}(x) = \psi(f(x)) \quad \forall x \in J, \qquad f(0) = y_0$$

を満たすことである．$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(y) = y^\alpha$，ある（もしくは任意の）初期条件の微分方程式 $f' = \psi(f)$ が

a）解 f が $J = \mathbb{R}$ 上存在しない

b）解 f が唯一つでない

ような $\alpha > 0$ を求めよ．

10） a）$n, m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx, \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx, \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx dx$$

を計算せよ．

b）$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x + \omega) = f(x)$ のとき，周期 ω を持つ周期関数であるという．区分的に連続な周期関数 f と任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+\omega}^{b+\omega} f(x)dx$$

となることを示せ．

c）$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が 2π を周期とし区分的に連続とする．$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, b_n := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

とおく．この a_n, b_n を f のフーリエ(Fourier)係数と呼ぶ．f が偶関数，つまりすべての $x \in \mathbb{R}$ で $f(x) = f(-x)$ であるとき

$$b_n = 0, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (\forall\, n)$$

であることを示せ．同様に f が奇関数，つまりすべての $x \in \mathbb{R}$ で $f(x) = -f(-x)$ であるとき

$$a_n = 0, b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (\forall\, n)$$

を示せ．

d) c)で定義した概念を用いて以下の主張を順に証明せよ．$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

とおくと

$$\int_0^{2\pi} f(x)f_n(x)dx = \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx$$
$$= \pi(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2 + b_\nu^2))$$

を得る．$\varphi_n := f - f_n$ とおくと

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\varphi_n(x)dx = 0.$$

したがって

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx + \int_0^{2\pi} |\varphi_n(x)|^2 dx.$$

これよりベッセル(Bessel)の不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx$$

を得る．等号が成立するのは

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|\varphi_n(x)|^2dx=0$$

のときである．

第II部

位相空間論の概念

第7章

距離空間：連続性, 位相空間論の基本的概念, コンパクト集合

［ 距離空間の開部分集合，閉部分集合，コンパクト部分集合など位相についての初歩的な概念を導入する．また写像の連続性を位相空間論の言葉で述べる．最後に抽象的な位相空間について簡単に学習する． ］

定義 7.1 距離空間とは集合 X と X 上の距離（関数）d の組 (X,d) のこと．つまり以下の条件

（i）$\forall\, x,y \in X : d(x,y) \geq 0$, さらに $d(x,y)=0 \iff x=y$ （正値性）

（ii）$\forall\, x,y \in X : d(x,y) = d(y,x)$ （対称性）

（iii）$\forall\, x,y,z \in X : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ （三角不等式）

を満たす (X,d) の組のことである．

文脈から，どの d を考えているかが明らかなときは，(X,d) のかわりに単に X と書く．$d(x,y)$ を x と y の距離という．

後に出てくる距離空間は距離以外に常に別の付加的な構造を併せもっている．しかしここで位相幾何学の基本的な概念を学ぶにあたっては距離構造のみで十分であり，付加的な構造はその概念や記述の中に隠れている．

定理 7.2 ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$, 特にバナッハ空間は

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

とおくことで距離空間となる．

証明 ノルムの性質から以下が確かめられる．

（i）$d(x,y)=\|x-y\|\geq 0$, $d(x,y)=0 \iff \|x-y\|=0 \iff x-y=0 \iff x=y$.

（ii）$d(x,y)=\|x-y\|=\|(-1)(y-x)\|=|-1|\|y-x\|=\|y-x\|=d(y,x)$.

（iii）$d(x,z)=\|x-z\|=\|(x-y)+(y-z)\|\leq\|x-y\|+\|y-z\|=d(x,y)+d(y,z)$. □

例　典型的な例は $\mathbb{R}$ に距離

$$d(x,y):=|x-y|$$

を与えたもの. $\mathbb{C}$ についても同様.

定義 7.3 $\mathbb{R}^d$ におけるノルムを

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{d}|x^i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad (x=(x^1,\dots,x^d)) \quad (p\text{-ノルム}, 1\leq p<\infty),$$

$$\|x\|_\infty := \max(|x^1|,\dots,|x^d|) \quad (\text{最大ノルム})$$

で定義する.

注意　特に重要なのはユークリッドノルム $\|\cdot\|_2$ で, 単に $\|\cdot\|$ とか, より簡単に $|\cdot|$ などとも書く. 定理 7.2 より, これらのノルムは $\mathbb{R}^d$ に距離構造を定義する. $\mathbb{C}^n$ にも同様のノルムや距離を定義できる.

もちろん, ノルムから導かれない距離も存在する. 例えば自明な例では, 集合 X に対して $d(x,x)=0$, $d(x,y)=1$ $(x\neq y\in X)$ とおけばよい.

最後に注意として

補題 7.4 (X,d) を距離空間, $B\subset X$ とする. B 上に d_B を $d_B(x,y)=d(x,y)$ $(x,y\in B)$ と定義することで B も距離空間になる.

証明は明らか.

補題 7.5 $(X,\|\cdot\|)$ をノルム空間とし, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ が $x\in X$ に収束する

とする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

つまりノルムは連続である．

証明 三角不等式より

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|.$$

仮定より右辺は 0 に収束する． □

定義 7.6 (X, d) を距離空間，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ を点列とする．(x_n) は

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon$$

のとき $x \in X$ に収束する といい，$x_n \to x$ と書く．点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ がコーシー列であるとは

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N} \forall\, n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

となることである．任意のコーシー列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ が $x \in X$ に収束するとき (X, d) は完備であるという．

上で述べた概念は $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ における対応する概念の直接的な一般化である．$\mathbb{R}^d$ でこれらの概念を見てみよう．ここでは，そして以降でも，$\mathbb{R}^d$ にはユークリッド距離が入っているものとする．しかし，以下の議論は上で見たすべての距離で有効であり，また $\mathbb{C}^d$ でも成立する．読者は演習として確かめよ．

定理 7.7 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d, x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^d)$ とする．

$$x_n \to x = (x^1, \ldots, x^d) \iff x_n^i \to x^i \quad (i = 1, \ldots, d).$$

特に，$\mathbb{R}$ が完備なので，$\mathbb{R}^d$ も完備である．

証明 "$\Rightarrow$"：$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq N : \|x_n - x\| < \varepsilon$. $i = 1, \ldots, d$ とすると，$|x_n^i - x^i| \leq \|x_n - x\|$ なので

$$|x_n^i - x^i| < \varepsilon, \quad (\forall\, n \geq N)$$

を得る．したがって $x_n^i \to x^i$.

"$\Leftarrow$"：$\varepsilon > 0$ とする．$N \in \mathbb{N}$ を任意の $n \geq N$, $i = 1, \ldots, n$ に対して

$$|x_n^i - x^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}$$

となるようにとる．このとき $n \geq N$ に対して

$$\|x_n - x\| = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_n^i - x^i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

したがって $x_n \to x$.

最後の主張は，(x_n) がコーシー列であるのは，すべての $i = 1, \ldots, d$ に対して (x_n^i) がコーシー列であるとき，またそのときに限ることからわかる．□

定義 7.8 X，Y を距離空間とする．写像 $f : X \to Y$ が

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

であるとき，f は $x_0 \in X$ で連続という．

f がすべての $x_0 \in \Omega$ で連続なとき，f は $\Omega \subset X$ で連続であるという．

定理 7.9 (X, d_X)，(Y, d_Y) を距離空間とする．写像 $f : X \to Y$ は

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ d_X(x, x_0) < \delta \text{となる}\ \forall\, x \in X\ :\ d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

であるとき，またそのときに限り x_0 で連続である．

証明　証明は $\mathbb{R}$ の部分集合間の写像（関数）とまったく同様．$|x - x_0|$ となっていたところを $d(x, x_0)$ とすればよい．□

定義 7.10 X，Y を距離空間，$\Omega \subset X$ とする．写像 $f : \Omega \to Y$ は

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ d(x, y) < \delta \text{となる}\ \forall x, y \in \Omega\ : d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

を満たすとき一様連続であるという．

例　X を距離空間，$x_0 \in X$,

$$f(x) := d(x, x_0) \quad (f : X \to \mathbb{R})$$

とすると，f は X 上一様連続.

実際，与えられた $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon$ ととると，三角不等式より $d(x,y) < \varepsilon$ となる $x, y \in X$ で

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y) < \varepsilon.$$

定理 7.11 X を距離空間とする．写像 $f = (f_1, \ldots, f_d) : X \to \mathbb{R}^d$ が(一様)連続なのは，すべての f_i $(i = 1, \ldots, d)$ が(一様)連続なとき，またそのときに限る．

証明 連続性は定理 7.7 による．一様連続性も簡単にわかる． □

定理 7.12 X を距離空間，$f, g : X \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき関数 $f + g, f \cdot g, \max(f, g), \min(f, g), |f| : X \to \mathbb{R}$ もまた連続である．（ここで $\max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x))$.） すべての $x \in X$ で $g(x) \neq 0$ であれば f/g も連続である．

証明 $K \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : K \to \mathbb{R}$ のときの証明と同じ． □

定理 7.13 X, Y, Z を距離空間，$f : X \to Y$ が x_0 で連続，$g : Y \to Z$ が $f(x_0)$ で連続とする．このとき $g \circ f$ は x_0 で連続．

証明 一変数関数のときの証明と同様． □

定義 7.14 X, Y を距離空間，$f, f_n : X \to Y (n \in \mathbb{N})$ を写像とする．

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N, x \in X : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

を満たすとき，写像列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は f に一様収束するという．（記号：$f_n \rightrightarrows f$）

定理 7.15 定義 7.14 と同様の仮定の下で，すべての f_n が連続で $f_n \rightrightarrows f$ であれば f も連続.

証明 証明は一変数関数のときと同様であるが，読者の便宜のために証明を述べておく．

$x_0 \in X, \varepsilon > 0$ とする．一様収束なので，ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して

$$d(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}\ (\forall\, x \in X).$$

f_m が連続なので，ある $\delta > 0$ が存在して，$d(x, x_0) < \delta$ のとき

$$d(f_m(x), f_m(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

したがって $d(x, x_0) < \delta$ のとき，

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f_m(x_0)) + d(f_m(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

を得る．□

次にノルム空間の線形写像について学ぶ．ノルム空間の線形写像は線形作用素ともいう．

定義 7.16 V, W をノルム $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$ を持つノルム空間とする．線形写像 $L : V \to W$ は，ある定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\|L(x)\|_W \leq c\|x\|_V \ (\forall\, x \in V)$$

を満たすとき，有界であるという．

定理 7.17 ノルム空間の線形作用素は有界なとき，またそのときに限り連続である．特に，すべての線形写像 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は連続である．

証明　$L : V \to W$ が有界とする．すなわち

$$\|L(x)\|_W \leq c\|x\|_V \quad (\forall\, x \in V).$$

もし $c > 0$ でなければ，主張は自明なので $c > 0$ と仮定してよい．$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ とおく．$\|x - y\|_V < \delta$ となる $x, y \in V$ に対して，

$$\|L(x) - L(y)\|_W \leq c\|x - y\|_V < \varepsilon.$$

したがって L は一様連続．逆に，$L : V \to W$ が連続とする．L は，特に 0 で連続なので，ある $\delta > 0$ が存在して

$$\|L(\xi)\|_W < 1 \quad (\|\xi\|_V < \delta \text{となる } \xi \text{ に対して}).$$

$c := \frac{2}{\delta}$ とする．$x \in V, x \neq 0$ に対して $\xi := \frac{x}{c\|x\|_V}$ とおく．$\|\xi\|_V < \delta$，した

がって δ の選び方より $\|L(\xi)\|_W < 1$，結果として

$$\|L(x)\|_W = \| \ (c\|x\|_V)L(\xi) \ \|_W < c\|x\|_V.$$

最後に，有限次元ベクトル空間の線形写像が有界であることは明らかなので，たった今示したことより連続である． □

注意 ここで証明したことは，定理に述べられていることより強い．L が 0 で連続 $\Rightarrow$ L が有界 $\Rightarrow$ L 一様連続．当然，L が線形であることが本質的に効いている．

定義 7.18 $L : V \to W$ をノルム空間の連続線形写像とする．L のノルム $\|L\|$ を以下で定義する．

$$\|L\| := \sup\{\|L(x)\|_W : \|x\|_V = 1\}$$
$$(= \sup\{\|L(x)\|_W : \|x\|_V \leq 1\} = \sup\{\frac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_V} : x \neq 0\}).$$

（定理 7.18 より，L が連続と仮定しているので $\|L\|$ は有限.）

$\|L\|$ が実際にノルムになっていることは簡単にわかる．

例 1） $\delta_x : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}, \delta_x(f) := f(x)$ $(x \in [0,1])$ は連続で $\|\delta_x\| = 1$. なぜなら

$$|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \sup\{|f(\xi)| : \xi \in [0,1]\} = \|f\|_{C^0}$$

だからである．等号は $f \equiv 1$ のとき成立する．

2） $D : C^1([0,1]) \to C^0([0,1]), Df := f'$ は連続で $\|D\| \leq 1$．なぜなら

$$\|Df\|_{C^0} = \|f'\|_{C^0} \leq \|f\|_{C^0} + \|f'\|_{C^0} = \|f\|_{C^1}$$

だからである．しかし，$C^1([0,1])$ に C^1-ノルムではなく上限ノルムを与えると（ここで $C^1([0,1])$ は $C^0([0,1])$ の部分空間と見みなしている），D は連続ではない．例えば，$f_n(x) := \sin(nx)$ に対して $(n \geq 2)$ $\|f_n\|_{C^0} = 1$, $\|Df_n\|_{C^0} = \|f_n'\|_{C^0} = n$．したがって

$$\|Df\|_{C^0} \leq c\|f\|_{C^0} \quad (\forall \ f \in C^1)$$

となるような $c \in \mathbb{R}$ は存在しない．このように線形作用素の連続性は，ノルムの選び方に依存する．

定義 7.19 V，W をノルム空間とする．連続な線形作用素 $L: V \to W$ のなす空間を $B(V, W)$ と表し，ノルム $\|\cdot\|$ を与える．

定理 7.20 W がバナッハ空間，V をノルム空間とする（例えばバナッハ空間など）．このとき $B(V, W)$ もバナッハ空間となる．

証明　$(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(V, W)$ を $\|\cdot\|$ に関するコーシー列とする．

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \geq N : \|L_n - L_m\| < \varepsilon.$$

任意の $x \in V$ 対して，すべての $n, m \geq N$ で

$$\|L_n(x) - L_m(x)\|_W = \|(L_n - L_m)(x)\|_W \leq \varepsilon \|x\|_V$$

が成立する．これは $\|L_n - L_m\|$ の定義より明らか．したがって，任意の $x \in V$ で $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ は W のコーシー列をなす．W は完備なので，$(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ は極限を持つ．これを $L(x)$ と書く．このようにして写像 $L: V \to W$ が定義され，これが線形であることは $x, y \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|L(x+y) - L(x) - L(y)\| \\
&\leq \|L(x+y) - L_N(x+y)\| + \|L_N(x+y) - L_N(x) - L_N(y)\| \\
&\qquad\qquad + \|L_N(x) - L(x)\| + \|L_N(y) - L(y)\|
\end{aligned}$$

よりわかる．右辺の第2項は L_N の線形性よりゼロになり，それ以外の項は十分大きな N をとればいくらでも小さくできる．ゆえに

$$L(x+y) = L(x) + L(y)$$

であり，同様に

$$L(\alpha x) = \alpha L(x) \quad (\forall\, \alpha \in \mathbb{R}).$$

さらに

$$\|L\| \leq \|L - L_N\| + \|L_N\|$$

なので，N をうまく選んで $\|L - L_N\| < 1$ とすれば，L は有界．よって

$L \in B(V, W)$. □

後のため，バナッハ空間間の可逆線形写像に関する結果を記しておく.

補題 7.21 $L_0 : V \to W$ をバナッハ空間の全単射連続線形写像で，連続な逆写像 L_0^{-1} を持つものとする． $L \in B(V, W)$ が

$$\|L - L_0\| < \left\|L_0^{-1}\right\|^{-1}$$

を満たすとき，L もまた 全単射で連続な逆を持つ.

証明 $L = L_0 \left(Id - L_0^{-1}(L_0 - L)\right)$ である．幾何級数と同様に，級数が収束することを示せば, L の逆は

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(L_0^{-1}(L_0 - L)\right)^i\right) L_0^{-1}$$

によって与えられることが分かる.

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=m}^{n} \left(L_0^{-1}(L_0 - L)\right)^i\| &\leq \sum_{i=m}^{n} \|\left(L_0^{-1}(L_0 - L)\right)^i\| \\ &\leq \sum_{i=m}^{n} \left(\|L_0^{-1}\|\|L_0 - L\|\right)^i\end{aligned}$$

である.

我々は $\left\|L_0^{-1}\right\| \|L_0 - L\| < 1$ と仮定したので，級数はコーシーの条件を満たし，従って有限ノルムの線形作用素に収束する．すでに見たように，この作用素が 逆 L^{-1} であり，定理 7.18 より連続性を得る. □

定義 7.22 (X, d) を距離空間 $x_0 \in X, r > 0$ とする.

$$\begin{aligned}U(x_0, r) &:= \{x \in X : d(x, x_0) < r\}, \\ B(x_0, r) &:= \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}\end{aligned}$$

をそれぞれ x_0 を中心とする半径 r の開球体，閉球体という．$U(x_0, r)$ を x_0 の r-近傍ともいう.

注意 $x_0, y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$ とする．$0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}d(x_0, y_0)$, のとき開球体 $U(x_0, \varepsilon)$ と開球体 $U(y_0, \varepsilon)$ は交わらない．

したがって距離空間はハウスドルフ(Hausdorff)の**分離公理**を満たす．ハウスドルフの分離公理とは，すべての相異なる2点に対して，それぞれの ε-近傍で，互いに交わらないものが存在することである．後で使う必要上以下のように定式化しておく．

補題 7.23 距離空間の2点 $x, y \in X$ で，$x \neq y$ とする．$U(x,\varepsilon) \cap U(y,\varepsilon) = \emptyset$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．□

定義 7.24 (X, d) を距離空間とする．部分集合 $\Omega \subset X$ はすべての $x \in \Omega$ に対してある $\varepsilon > 0$ が存在して

$$U(x, \varepsilon) \subset \Omega$$

となるとき，開集合という．つまり各点が Ω に含まれているだけでなく，その点の ε-近傍までこめて Ω に含まれているということである．$x \in X$ を含む X の開集合を x の開近傍という．部分集合 $A \subset X$ は，$X \backslash A$ が開集合であるとき閉集合という．

例　1) $X = \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $(a < b)$．区間 (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$ は開集合．例えば $x_0 \in (a, b)$ に対して $\varepsilon = \min(|a - x_0|, |b - x_0|)$ ととれば，$U(x_0, \varepsilon) =$
$\{\xi \in \mathbb{R} : |x_0 - \xi| < \varepsilon\} \subset (a, b)$．$X \backslash [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ は開集合だから $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ は閉集合である．これらは開集合ではない．例えば，$[a, b]$ に関しては $U(a, \varepsilon) \subset [a, b]$ となるような $\varepsilon > 0$ は存在しない．したがって $a \in [a, b]$ は $[a, b]$ に含まれるような ε-近傍を持たない．同様に (a, b) は閉集合ではない．同じような考察で $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ は開集合でも閉集合でもないことがわかる．

2) (X, d) を距離空間，$x_0 \in X, r > 0$ とすると $U(x_0, r)$ は開集合．$x \in U(x_0, r)$ のとき $\varepsilon := r - d(x, x_0) > 0$ ととれば，

$$U(x, \varepsilon) \subset U(x_0, r)$$

であることが三角不等式よりわかる．

この例を以下のように述べておこう．

補題 7.25 (X,d) を距離空間，$x_0 \in X, r > 0$ とすると，$U(x_0,r)$ は開集合．

定理 7.26 (X,d) を距離空間とする．

(i) $\emptyset$，X 自身は開集合．

(ii) 開集合 Ω_1, Ω_2 に対して，その交わり $\Omega_1 \cap \Omega_2$ も開集合．

(iii) $(\Omega_i)_{i\in I}$ (I 添数集合) を X の開集合の族とする．和集合 $\bigcup_{i\in I} \Omega_i$ も開集合．

証明

(i) $\emptyset$ は開集合．なぜなら $x \in \emptyset$ となる点は存在しないので，満たすべき条件はなにもないからである．X は開集合．なぜなら，すべての $x \in X$ と任意の $r > 0$ に対して $U(x,r) \subset X$ だからである．

(ii) $x_0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ とする．Ω_1 も Ω_2 も開集合なので，ある $r_1, r_2 > 0$ が存在して，$U(x_0,r_i) \subset \Omega_i, i = 1,2.$ $r := \min(r_1,r_2)$ とすると，

$$U(x_0,r) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

したがって $\Omega_1 \cap \Omega_2$ は開集合．

(iii) $x_0 \in \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ とする．ある $i_0 \in I$ が存在して $x_0 \in \Omega_{i_0}$. Ω_{i_0} は開集合なので，ある $r > 0$ が存在して $U(x_0,r) \subset \Omega_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, これにより $\bigcup_{i\in I} \Omega_i$ が開集合であることがわかる． □

注意 (ii) より以下のことが帰納的に証明できる．$\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ が開集合であれば $\bigcap_{\nu=1}^{n} \Omega_\nu$ も開集合．この性質は無限個の集合の共通部分に対しては成立しない．例として，$\Omega_\nu = (-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}) \subset \mathbb{R}$ は $\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} \Omega_\nu = \{0\}$ であり，これは開集合でない．

例 補題 7.4 の直前に挙げた例では，すべての $x \neq y$ で $d(x,y) = 1$ であっ

た．したがってすべての X の部分集合は開集合，したがってさらに，すべての部分集合はその補集合は開集合なので，閉集合でもある．

定理 7.27 X を距離空間とする．部分集合 $A \subset X$ が閉集合であるのは $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ で (x_n) が $x \in X$ に収束するならば，x は A に属するとき，またそのときに限る．

証明 "⇒"：A を閉集合で，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ が $x \in X$ に収束しているとする．$x \in X\backslash A$ のときある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(x,\varepsilon) \subset X\backslash A$. しかし，これは $x_n \to x$ に矛盾．したがって $x \in A$ でなくてはならない．

"⇐"：A が閉でないとする．つまり $X\backslash A$ が開ではないとする．$x \in X\backslash A$ で，$U(x,\frac{1}{n}) \subset X\backslash A$ が成立する $n \in \mathbb{N}$ が存在しないとすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してある $x_n \in A \cap U(x,\frac{1}{n})$ が存在する．$d(x_n,x) < \frac{1}{n}$ なので，$(x_n) \subset A$ は x に収束する．仮定より $x \in A$. なぜこのような矛盾が生じたかというと，$X\backslash A$ が開でないと仮定したからである．よって $X\backslash A$ は開であり，A は閉である． □

この定理より次の系がすぐにわかる．

系 7.28 距離空間のすべての有限部分集合，特に一点からなる部分集合は閉集合である．

定義 7.29 X を距離空間，$M \subset X$ とする．$x \in X$ が M の境界上の点であるとは，x のすべての開近傍が M の(少なくとも)一点を含み，また M の補集合 $X\backslash M$ の点も含むことである．∂M で M の境界を表す．$\mathring{M} := M\backslash\partial M$ で M の内部，$\bar{M} := M \cup \partial M$ で M の閉包を表す．

前に開球体，閉球体などの言葉を定義したが，以下の定理によってその定義が整合性のあるものであることがわかる．

定理 7.30 X を距離空間，$M \subset X$ とする．

(i) ∂M は閉集合．

(ii) $M\backslash\partial M$ は開集合．

(iii) $M \cup \partial M$ は閉集合.

証明

(i) $x \in X \backslash \partial M$ とすると，M の点をまったく含まないか，$X \backslash M$ の点をまったく含まないような，ある ε 近傍 $U(x,\varepsilon)$ が存在する．もし $y \in \partial M$ となる $y \in U(x,\varepsilon)$ があれば補題 7.25 より，ある $\eta > 0$ が存在して $U(y,\eta) \subset U(x,\varepsilon)$．$y \in \partial M$ なので，近傍 $U(y,\eta)$ は M の点も含み，また $X \backslash M$ の点も含む．したがって $U(x,\varepsilon)$ も M の点も含み，また $X \backslash M$ の点も含む．これは矛盾である．よって $U(x,\varepsilon) \subset X \backslash \partial M$．つまり $X \backslash \partial M$ は開集合であり，∂M は閉集合である．

(ii) $x \in M \backslash \partial M$ なら，ある ε-近傍 $U(x,\varepsilon)$ が存在して，M の点をまったく含まないか，$X \backslash M$ の点をまったく含まないかのどちらかである．$x \in M \cap U(x,\varepsilon)$ なので，実際に可能なのは $X \backslash M$ の点をまったく含まないだけである．(i) より，$U(x,\varepsilon) \subset M \backslash \partial M$ がわかる．したがって $M \backslash \partial M$ は開．

(iii) $x \in X \backslash (M \cup \partial M)$ であれば，特に $x \in X \backslash \partial M$ なので，ある ε-近傍 $U(x,\varepsilon)$ が存在して，M の点をまったく含まないか，$X \backslash M$ の点をまったく含まないかのどちらかである．$x \in X \backslash M \cap U(x,\varepsilon)$ なので M の点をまったく含まない．上の証明と同様に $U(x,\varepsilon) \subset X \backslash (M \cup \partial M)$．したがって $X \backslash (M \cup \partial M)$ は開であり，$M \cup \partial M$ が閉であることがわかる． □

次に述べることは，ひょっとすると最初は少し意外に感じるかもしれない．

定理 7.31 X, Y を距離空間，$f : X \to Y$ を写像とする．f が連続なのはすべての開集合 $V \subset Y$ に対して，$f^{-1}(V)$ が X の開集合であるとき，またそのときに限る．

証明 "$\Rightarrow$"：$V \subset Y$ が開集合で $x_0 \in f^{-1}(V)$ とする．特に $f(x_0) \in V$ である．ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(f(x_0),\varepsilon) \subset V$. f は連続なので，ある $\delta > 0$ が存在して，$d(x, x_0) < \delta$ であれば $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ である．しかしこれは $x \in U(x_0,\delta)$ であれば $f(x) \in U(f(x_0),\varepsilon) \subset V$ となることを意味する．ゆえに $U(x_0,\delta) \subset f^{-1}(V)$．したがって $f^{-1}(V)$ は開．

“ $\Leftarrow$ ”：$x_0 \in X, \varepsilon > 0$ とする．近傍 $U(f(x_0), \varepsilon)$ は開集合，したがって仮定より $f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$ もまた開集合．$\delta > 0$ が存在して $U(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$ となり，$f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon)$．これは

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

を意味する．ゆえに f は連続． □

例 補題 7.4 の前に挙げた自明な距離空間 (X, d) では，任意の距離空間 Y へのすべての $f : X \to Y$ が連続である．なぜなら X のすべての部分集合は開集合だからである．

注意：f の連続性は，開集合 $U \subset X$ の像 $f(U)$ が Y の開集合であることを意味しない．例として $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ を考える．$f(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合ではない．

定義 7.32 ベクトル空間の部分集合 C は，任意の $x, y \in C$ と任意の $t \in [0, 1]$ で $x + t(y - x) \in C$ のとき，凸であるという．

つまり凸集合はその凸集合の 2 点を結ぶ線分をその内部に含む．

例 B をバナッハ空間，$x_0 \in B$ とする．すべての $r > 0$ に対して，$U(x_0, r)$, $B(x_0, r)$ は凸集合. 実際 $x, y \in U(x_0, r)$ であれば $\|x - x_0\| < r$，$\|y - x_0\| < r$. $0 \leq t \leq 1$，$\|x - x_0\| < r$ に対して

$$\|x + t(y - x) - x_0\| \leq t\|y - x_0\| + (1 - t)\|x - x_0\| < r.$$

したがって $x + t(y - x) \in U(x_0, r)$.

$B(x_0, r)$ が凸であることの証明も同様.

定義 7.33 距離空間 B で，開集合 $\Omega_1, \Omega_2 \subset B$ が

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = B$$
$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

を満たせば,

$$\Omega_1 = \emptyset \text{ もしくは } \Omega_2 = \emptyset$$

が常に成立するとき，B は連結であるという．

例 すべての $x \neq y$ に対して $d(x, y) = 1$ で定義される距離空間 (X, d) についてもう少し考察を続ける．X が 2 点以上の元を持つとき X は連結ではない．なぜなら X のすべての部分集合は開集合なので空でない 2 つの交わらない開集合で，和が X となるものがある．

以下の結果はしばしば証明の過程で使われる．

補題 7.34 B が連結とする．Ω が B の空でない部分集合で閉かつ開であれば $\Omega = B$.

証明 $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_2 = B \backslash \Omega$ は定義 7.33 の条件を満たす．B は連結で，$\Omega \neq \emptyset$ なので，$B \backslash \Omega = \emptyset$. ゆえに $\Omega = B$. □

補題 7.35 すべてのノルム空間は連結．より一般にノルム空間の任意の凸部分集合は連結．

証明 B をノルム空間，Ω_1, Ω_2 を空でない B の開部分集合で $B = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ となるものとする．$x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$ に対して

$$t := \ \sup\{\tau \in [0, 1] : \ sy + (1 - s)x \in \Omega_1, \, 0 \leq \forall s \leq \tau\}$$

とおく．($x \in \Omega_1$ なので，この集合は 0 を含み，したがって空集合でない.)

$$\xi := ty + (1 - t)x$$

は Ω_1 にも Ω_2 にも属さないことを示そう．これは $\Omega_1 \cup \Omega_2 = B$ に矛盾し，したがって Ω_1 か Ω_2 のどちらか一方は空集合でなくてはならない．上の主張を示すために，ξ を含む任意の開集合が $\Omega_2 = B \backslash \Omega_1$ の点も $\Omega_1 = B \backslash \Omega_2$ の点も含むことを見る．Ω_1, Ω_2 は開集合なので，これは ξ が Ω_1 にも Ω_2 にも属さないことを意味する．そこで U を ξ を含む任意の開集合とする．$t = 1$ なら $\xi = y \notin \Omega_1$. もし $t < 1$ であれば，$t < t' \leq 1$ となる t' で $\xi' := t'y + (1 - t')x \in U$ だが $\xi' \notin \Omega_1$ となるものが存在する．実際 U は開集合なので，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$t - \varepsilon < s < t + \varepsilon$ に対して $sy + (1 - s)x \in U$. t の定義より，すべての $\varepsilon > 0$ に対して $t < t' < t + \varepsilon$ と

なるある t' で $t'y + (1-t')x \notin \Omega_1$ となるものが存在する．もし $t = 0$ であれば $\xi = x \notin \Omega_2$. もし $t > 0$ であれば $t - \varepsilon < t'' < t$ となるある t'' が存在し $\xi'' := t''y + (1-t'')x \in U$. $t'' < t$ であり，t の定義より $\xi'' \in \Omega_1 = B \backslash \Omega_2$. したがって U は $\xi' \in \Omega_2$ を持ち，また同様に $\xi'' \in \Omega_1$ も持つ．

B の任意の凸部分集合に対しても同様に連結性が証明できる．　□

補題 7.36 以下に挙げるものは，$\mathbb{R}$ の連結部分集合であり，またこれらが $\mathbb{R}$ の連結集合のすべてである．有界または非有界区間(開区間，閉区間，半開区間(つまり $\{a < x \leq b\}$ または $\{a \leq x < b\}$，$\mathbb{R}$ も含む)．ただし，ここで一点のみの集合も閉区間と見なしている．

証明　$B \subset \mathbb{R}$ とする．距離空間の部分集合なので B もまた距離空間である．$x \in B$ の B の距離に関する近傍 $U(x, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ は

$$U(x,\varepsilon) := \{y \in B : d(x,y) < \varepsilon\} = B \cap \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < \varepsilon\}.$$

これより，B の距離に関する B の開集合は，Ω を $\mathbb{R}$ の開集合とすると，$B \cap \Omega$ の形で表せる．

以上の初歩的な考察を踏まえて，証明に取りかかろう．B を $\mathbb{R}$ の空でない連結な部分集合とする．B が唯一点のみを含むときは証明すべきことはないので，$x_1, x_2 \in B$ とし，さらに $x_1 < x_2$ とおく．$\xi \in \mathbb{R}$ で $x_1 < \xi < x_2, \xi \notin B$ となる点があると仮定する．

$$\Omega_1 := B \cap \{x \in \mathbb{R} : x < \xi\}$$
$$\Omega_2 := B \cap \{x \in \mathbb{R} : x > \xi\}$$

とおく．Ω_1, Ω_2 は B の開集合で，$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$，また $\xi \notin B$ なので $\Omega_1 \cup \Omega_2 = B$. $x_1 \in \Omega_1, x_2 \in \Omega_2$ なので，どちらも空集合ではなく，B は連結ではありえない．したがって B が連結であれば B の2点の間にあるすべての点は B に含まれる．

$$M := \sup\{x \in B\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$
$$m := \inf\{x \in B\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

とおくと B は $m < x < M$ となるすべての x を含む．m または M 自身も

有限の値であれば B に含まれる可能性がある．B が区間であることが以上で示せた． □

定義 7.37 距離空間の部分集合 B が有界とは，$x_0 \in X, r > 0$ が存在して

$$B \subset U(x_0, r)$$

となることである．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n \in \mathbb{N}$ と $x_1, \ldots, x_n \in B$ が存在して

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i, \varepsilon)$$

となるとき，B は全有界であるという．

定義 7.38 距離空間の部分集合 K は K の任意の開被覆 $(U_i)_{i \in I}$（つまり U_i はすべて開集合で，$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ となる）に対して，そのうちの有限個の $(U_i)_{i \in E}$（$E \subset I$ で E は有限集合）によって K が被覆される，すなわち，$K \subset \bigcup_{i \in E} U_i$ となるときコンパクトであるという．K が点列コンパクトとは，任意の点列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ がある $x \in K$ に収束する部分列を持つことである．

コンパクトの概念が解析学での最も大切な概念であると言われるのはもっともなことであろう．点列コンパクト性は部分列の極限の存在を表している．以後の多くの章ではコンパクト性の概念がしばしば基本的な事項である．

定理 7.39 K を距離空間 X の部分集合とすると，以下の条件は互いに同値である．

(i) K はコンパクト．

(ii) K は点列コンパクト．

(iii) K は完備（つまり $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ がコーシー列であれば，$x \in K$ に収束する）で全有界．

証明 "(i) $\Rightarrow$ (ii)"：$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ とする．K の点に収束するような部分列 (x_n) が存在しないとする．このとき，各 $x \in K$ に対してその近傍 $U(x, r(x))$

で点列の有限個の点しか含まないものが存在する．実際，もし $x \in X$ が存在して，任意の $\varepsilon > 0$ に対して無限個の $n \in \mathbb{N}$ で $x_n \in U(x,\varepsilon)$ となれば，特に $\varepsilon = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}$ に対して同様のことが成立する．したがって帰納的に $m \in \mathbb{N}$ に対して $n_m > n_{m-1}$，$x_{n_m} \in U(x, \frac{1}{m})$ となる $n_m \in \mathbb{N}$ を見つけることができる．このとき点列 $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に収束し，仮定に矛盾する．したがってすべての元 $x \in K$ のある近傍は点列の点を高々有限個しか含まない．明らかに

$$K \subset \bigcup_{x\in K} U(x, r(x))$$

であり，さらに K はコンパクトなので，この被覆の有限部分被覆，つまり有限個の添数 $\xi_1, \ldots, \xi_N \in K$ があって

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} U(\xi_i, r(\xi_i)).$$

いずれの $U(\xi_i, r(\xi_i))$ も点列のうちの高々有限個の項しか含まないので，K もまた有限個の項しか含まない．したがって，点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は K の有限部分集合に含まれ，特に部分列が収束する．これは仮定に矛盾する．よって K は点列コンパクトである．

"(ii) ⇒ (iii)"：まず，すべての K 内の列，特にコーシー列は，K 内の点に収束する部分列を持つ．したがって，すべてのコーシー列はそれ自身 K 内の点に収束する．なぜならコーシー列が収束するための必要十分条件は，すべての部分列が収束することだからである．したがって K は完備．

K が全有界でないとしよう．このとき，ある $\eta > 0$ があって K が有限個の $U(x_i, \eta)$ では被覆できない．以下のように，帰納的に点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ を定義する．任意の $x_1 \in K$ をとる．$x_1, \ldots, x_{n-1} \in K$ がすでに選ばれており，$1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1, i \neq j$ で $d(x_i, x_j) \geq \eta$ となっているとする．K は $\bigcup_{i=1}^{n-1} U(x_i, \eta)$ で被覆されない．したがってある $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U(x_i, \eta)$ が存在し，この x_n は $1 \leq i \leq n-1$ に対して $d(x_i, x_n) \geq \eta$ を満たしている．点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列を含まない．なぜなら，収束する部分列があれば，これはコーシーの条件を満たし，特に x_{n_1}，x_{n_2} で $d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \eta$ となるものがある．(x_n) が収束する部分列を含まないというのは，K が点列コ

ンパクトであることに矛盾する．したがって K は全有界である．

"(iii) $\Rightarrow$ (i)"：K の開被覆 $(U_i)_{i\in I}$ で有限部分被覆を持たないものがあるとする．帰納的に閉球体 $B(\xi_n, r_n)$ の列 (B_n) を以下のように定義する．

$B_0 = X$ とし，$B_{n-1} = B(\xi_{n-1}, \frac{1}{2^{n-1}})$ を $\xi_{n-1} \in K$ で，$B_{n-1} \cap K$ が $(U_i)_{i\in I}$ のいかなる有限部分開被覆によっても被覆されないようなものとする．K が全有界と仮定しているので K は有限個の閉球体 $K_j = B(y_j, \frac{1}{2^n}), y_j \in K$ で被覆される．球体 $K_j \cap B_{n-1} \neq \emptyset$ のうち，少なくとも一つの $K_j \cap K$ は有限個の $(U_i)_{i\in I}$ によって被覆できない．なぜなら，そうでないとすると $B_{n-1} \cap K$ が有限個の U_i によって被覆されることになってしまうからである．このような性質を持つ K_j を $B_n = B(\xi_n, \frac{1}{2^n})$ としてとる．$B_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$ なので，

$$d(\xi_n, \xi_{n-1}) \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

$N \in \mathbb{N}$，$n, m \geq N$ に対して，($n < m$ とすると)

$$d(\xi_n, \xi_m) \leq d(\xi_n, \xi_{n+1}) + \ldots + d(\xi_{m-1}, \xi_m) \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m-2}} \leq \frac{1}{2^{N-2}}.$$

したがって $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列で，仮定より，ある $x \in K$ に収束する．$x \in U_{i_0}$ としよう（$(U_i)_{i\in I}$ が K を被覆するので，このような $i_0 \in I$ が存在する）．U_{i_0} は開集合なので，ある $\varepsilon > 0$ が存在し，$U(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}$．$(\xi_m)$ が x に収束するので，ある $N \in \mathbb{N}$ があり $d(x, \xi_N) < \frac{\varepsilon}{2}$ で $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$. 三角不等式より

$$B(\xi_N, \frac{1}{2^N}) \subset U(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}.$$

これは，$B_N = B(\xi_N, \frac{1}{2^N})$ が有限個の $(U_i)_{i\in I}$ で被覆できないという仮定に矛盾する．これにより K のコンパクト性が証明できた． □

補題 7.40 コンパクトな K の任意の閉部分集合 A はコンパクト．

証明 定理 7.39 の 3 つの条件のいずれを使っても証明できる．例えば点列コンパクト性を使う．（読者は演習として，他の条件を使って証明を試みよ.）$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ を点列とする．$A \subset K$ で，K はコンパクトなので，部分列が $x \in K$ に収束し，A は閉集合なので，この $x \in A$（定理 7.27）．したがって A はコンパクト． □

系 7.41（ハイネ・ボレル(Heine-Borel)）$\mathbb{R}^d$ の部分集合 K は閉かつ有界であるとき，またそのときに限りコンパクトである．

証明　完備集合は閉で，全有界であれば有界なので，定理 7.39 (iii) より，一方向は示せる．K が閉かつ有界とする．K は有界なので，ある $R > 0$ が存在して K は

$$W_R := \{x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d, \ \max_{i=1,\dots,d} |x^i| \le R\}$$

に含まれる．K は閉なので．補題 7.40 より，W_R がコンパクトであることを示せばよい．$\mathbb{R}^d$ は完備(定理 7.7)で W_R は閉(定理 7.7 と同様に，区間 $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ が閉であることを使って示せる)なので，$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_R$ がコーシー列であれば，$x \in \mathbb{R}^d$ に収束し，W_R が閉なので，この x は W_R に属する，したがって W_R は完備である．次に W_R が全有界であることを見る．$\varepsilon > 0$ に対して $m \in \mathbb{N}$ を $m > \frac{R}{\varepsilon}$ となるようにとる．

$$W_R \subset \bigcup \{U((\frac{k_1 R}{m}, \frac{k_2 R}{m}, \dots, \frac{k_n R}{m}), \varepsilon) : \\ k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}, -m \le k_i \le m \quad i = 1, \dots, d\}$$

したがって W_R は全有界．したがって定理 7.39 の条件(iii)が成立し，主張が従う．　□

注意　系 7.41 の主張は，無限次元空間では成立しない．例として

$$S := \{f \in C^0([0,1]) : \|f\|_{C^0} = 1\}$$

を考えよ．S は明らかに有界であり，また $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が一様に f に収束すれば，$\|f\|_{C^0} = 1$ なので，$f \in S$ だから，S は閉．しかし S はコンパクトではない．

$$f_n = x^n$$

を考える．前に見たように $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する部分列を持たない．なぜなら任意の部分列の各点収束の極限は

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad \text{(5 章の例 1 を見よ)}$$

であり f は不連続であり，したがって $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列は連続関数に一様収束しない．これより S は点列コンパクトでない．

系 7.42（ボルツァーノ・ワイエルシュトラス）$\mathbb{R}^d$ のすべての有界列は収束する部分列を持つ．

証明 系 7.41 と定理 7.39 より直接従う．この列のすべての点のなす集合の閉包を考えればよい． □

定理 7.43 K をコンパクトで $f : K \to \mathbb{R}$ を連続とする．このとき f は最大値と最小値を K でとる．すなわち，$y_1, y_2 \in K$ が存在して

$$f(y_1) = \sup\{f(x) : x \in K\}$$
$$f(y_2) = \inf\{f(x) : x \in K\}.$$

証明 f が最大値を K でとることを示す．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ を

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup\{f(x) : x \in K\}$$

となる点列とする．K は点列コンパクトなので，部分列を選べば (x_n) は $y_1 \in K$ に収束する．f は連続なので

$$f(y_1) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup\{f(x) : x \in K\}.$$

□

定理 7.43 はコンパクトの被覆を使った判定条件を使っても証明できる．例えば

$$M := \sup\{f(x) : x \in K\}$$

を考える．f が K で最大値でとらないとする．f の連続性より任意の $x \in K$ に対して $\delta > 0$ が存在して，$d(x, \xi) < \delta$ であれば

$$f(\xi) < r(x) := \frac{f(x) + M}{2} < M$$

（ε-δ 判定条件を $\varepsilon = \frac{M - f(x)}{2}$ に対して使う．）δ は x に依存しているので，δ のかわりに $\delta(x)$ と書く．

K はコンパクトで，$(U(x,\delta(x))_{x\in K}$ が K の開被覆なので，有限部分被覆を持つ．つまり，ある $x_1,\ldots,x_n$ があり

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i,\delta(x_i)).$$

$$r := \max_{i=1,\ldots,n} r(x_i) < M$$

とおく．ある i で $\xi \in U(x_i,\delta(x_i))$ なので $f(\xi) < r(x_i) \leq r$ なので，任意の $\xi \in K$ で $f(\xi) < r$．$r < M$ なので，f の K における上限は M とはなり得ない．これは矛盾．よって f は最大値を K でとる．

定理 7.44 K をコンパクト，Y を距離空間，$f : K \to Y$ を連続とする．このとき f は K 上一様連続である．

証明　$\varepsilon > 0$ とする．任意の $x \in K$ に対して，f の連続性より，ある $\delta(x) > 0$ が存在して

$$f(U(x,2\delta(x))) \subset U(f(x),\frac{\varepsilon}{2}).$$

この $(U(x,\delta(x)))_{x\in K}$ は K の開被覆である．K はコンパクトなので，この被覆は有限部分被覆を持ち，したがって点 $x_1,\ldots,x_m \in K$ があって

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} U(x_i,\delta(x_i)).$$

$\delta := \min_{i=1,\ldots,m} \delta(x_i) > 0$ とおく．もし $d(x,y) < \delta$ であれば，ある $j \in \{1,\ldots,m\}$ で $x,y \in U(x_j,2\delta(x_j))$．これより $f(x),f(y) \in U(f(x_j),\frac{\varepsilon}{2})$ で，ゆえに $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$. $d(x,y) < \delta$ となる任意の $x,y \in K$ で上のことが成立するので f が K 上一様連続であることがわかる．□

定理 7.45 X,Y を距離空間，$K \subset X$ をコンパクト，$f : K \to Y$ を連続とする．このとき $f(K)$ はコンパクト．(つまりコンパクト集合の連続写像の像は再びコンパクトになる.)

証明　$(U_i)_{i\in I}$ を $f(K)$ の開被覆とし，$V_i := f^{-1}(U_i), i \in I$ とおく．定理 7.31 より V_i は開集合である．さらに $(V_i)_{i\in I}$ は K の開被覆となる．K はコ

ンパクトなので，K のある有限部分被覆 $f^{-1}(U_i), i \in E$ (E 有限)が存在する．結果として $f(K)$ は $f(V_i) \subset U_i (i \in E)$ によって被覆される．よって $U_i (i \in E)$ が $f(K)$ の有限部分被覆であり，したがって $f(K)$ はコンパクトである． □

もちろん定理 7.45 は点列コンパクト性を使っても示せる．

定理 7.46 $\mathbb{R}^d$ のすべてのノルムは以下の意味で同値である．

$\|\cdot\|_0$，$\|\cdot\|_1$ を $\mathbb{R}^d$ 上のノルムとする．このとき $\lambda, \mu > 0$ があって

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d : \lambda\|x\|_0 \le \|x\|_1 \le \mu\|x\|_0.$$

証明 左側の不等式のみを示す．$\|\cdot\|_0$ と $\|\cdot\|_1$ の役割を入れ替えることで右側の不等式が示せる．

$$\lambda := \inf\{\|y\|_1 : y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_0 = 1\}$$

とおく．$\mathbb{R}^d$ に $\|\cdot\|_0$ から導かれる距離をいれる．$\{y \in \mathbb{R}^d : \|y\|_0 = 1\}$ は有界閉である．なぜなら $y_n \to y$ であれば $\|y_n - y\|_0 \to 0$ であり，$|\|y_n\|_0 - \|y\|_0| \le \|y_n - y\|_0$ (三角不等式) より $\|y_n\|_0 \to \|y\|_0$ を得る．したがってすべての n に対して $\|y_n\|_0 = 1$ であれば $\|y\|_0 = 1$．系 7.41 より $\{y \in \mathbb{R}^d : \|y\|_0 = 1\}$ はコンパクト．

次に $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が連続であることを見る．まず $v \in \mathbb{R}^d, v \neq 0$ とする．列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|\lambda_n v - \lambda v\|_0 \to 0\\
\Leftrightarrow &|\lambda_n - \lambda|\|v\|_0 \to 0\\
\Leftrightarrow &|\lambda_n - \lambda|\|v\|_1 \to 0\\
\Leftrightarrow &\|\lambda_n v - \lambda v\|_1 \to 0.
\end{aligned}$$

ここで $e_1, \ldots, e_d$ を $\mathbb{R}^d$ の基底とする．$x = x^1 e_1 + \cdots + x^d e_d \in \mathbb{R}^d$. v のかわりに，基底を与えるベクトル $e_1, \ldots, e_d$, を代入すると，任意の列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$, $x_n = x_n^1 e_1 + \ldots + x_n^n e_d$ で

$$\|x_n - x\|_0 \to 0 \;\Leftrightarrow\; \|x_n - x\|_1 \to 0.$$

これより $\|\cdot\|_1$ の連続性が従う．なぜなら $\mathbb{R}^d$ 上の距離を，$x_n \to x$ が $\|x_n - x\|_0 \to 0$ と同値であるように選んだからである．

$\{y \in \mathbb{R}^d : \|y\|_0 = 1\}$ はコンパクトで $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が連続なので，$\|x_0\|_0 = 1$ となる x_0 で $\|x_0\|_1 = \lambda$ となるものがある．$x_0 \neq 0$ なので，$\lambda > 0$. したがって $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\|x\|_1 = \|x\|_0 \cdot \|\frac{x}{\|x\|_0}\|_1 \geq \lambda\|x\|_0 \text{ (} \|\tfrac{x}{\|x\|_0}\|_0 = 1 \text{ なので).}$$

主張が示せた．□

定義 7.47 距離空間 X から距離空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ はすべての有界列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ に対して $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ が収束する部分列を持つときコンパクトであるという．

例　**1)** すべての連続写像(関数) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ はコンパクト．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ が有界列であれば f が連続なので $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ も有界であり，系 7.42 よりすべての連続写像(関数) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ がコンパクトであることがわかる．

2) 関数 $i : C^{0,\alpha}([0,1]) \to C^0([0,1])$, $i(g) = g, (0 < \alpha \leq 1)$ はコンパクト．これはアルツェラ・アスコリの定理(5.21)よりわかる．なぜなら，$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $C^{0,\alpha}([0,1])$ の有界列とすると，同等連続であり，一様収束する部分列を持つ．同様の理由で $i : C^k([0,1]) \to C^{k-1}([0,1])$ $(k \geq 1)$ もコンパクト．

この章の締めくくりに，簡単に抽象的な位相空間の概念を学ぼう．本書のこれ以降で必要としないが，多くの数学の理論の基礎になっている概念であり，ここで述べておくことは自然であろう．定理 7.26 と定理 7.31 を公理として使うというのがアイデアである．

定義 7.48 X を集合とする．X 上の位相は X の開集合と呼ばれる X の部分集合の集まり $\mathcal{U}$ で以下を満たすものによって与えられる．

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$.

(ii) $U, V \in \mathcal{U}$ であれば $U \cap V \in \mathcal{U}$.

(iii) ある添数集合 I に属するすべての i で $U_i \in \mathcal{U}$ であれば

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}.$$

位相空間 $(X, \mathcal{U})$ とは位相 $\mathcal{U}$ を持つ集合 X のことである．$A \subset X$ は $X \backslash A$ が開集合のとき閉集合であるという．

X の開集合 U が $x \in X$ を含むとき x の開近傍という．

定理 7.26 より，任意の距離空間 (X, d) は位相空間である．開集合の集まり $\mathcal{U}$ を定理 7.24 で定義した意味での開集合全体とすればよい．このようにして得られた位相空間を距離から導かれた位相という．

また（補題 7.23 より）すべての距離空間が以下を満たすこともすでに見ている．

定義 7.49 位相空間 $(X, \mathcal{U})$ は，$x \neq y$ となる任意の $x, y \in X$ に対して，x の開近傍 $U(x)$ と y の開近傍 $U(y)$ で

$$U(x) \cap U(y) = \emptyset$$

となるものがあるときハウスドルフ空間であるという．

すべての位相空間がこの性質を持つわけではない．

例　1) X を 2 点以上を持つ集合とし，$\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$ とすると，これは X 上に位相を与えるがハウスドルフではない．

2) $\mathbb{R}^2$ に以下の位相を与える．

開集合は $\emptyset, \mathbb{R}^2$, そしてすべての直線の補集合，さらにこれらの集合の有限個の交わりと，任意の和集合で与える．別の言葉でいうと，$\mathbb{R}^2$ のこの位相に関する閉集合はアフィン線形空間とその有限和集合となる．この位相はハウスドルフではない．$x, y \in \mathbb{R}^2, x \neq y$ とし $U(x)$, $U(y)$ を，それぞれ x，y の開近傍とする．$U(x) \cap U(y)$ の補集合はアフィン線形空間の有限和（$U(x)$ も $U(y)$ も空集合でないので $\mathbb{R}^2$ とは一致しない）である．したがってこの補集合は $\mathbb{R}^2$ の真部分集合であり，特

に $U(x) \cap U(y) \neq \emptyset$.

（上の位相の一般化でザリスキ(Zariski)位相と呼ばれるものは代数幾何では非常に大切である.）

記号に関する注：上の例以外では $\mathbb{R}^d$ にはいつでもユークリッド距離とそれから導かれる位相が入っているものとする.

次の定義は定理 7.31 を公理としたものである.

定義 7.50 位相空間間の写像 $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ は，すべての開集合 $V \subset Y$ に対して $f^{-1}(V)$ が X の開集合となるとき，連続であるという.

例　1）X の位相 $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$ を考える．$(Y, \mathcal{V})$ をハウスドルフ位相空間とする．$f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ が連続であれば定数関数である．$y_0 \in f(X)$ とする．y_0 の任意の開近傍 $U(y_0)$ に対して $f^{-1}(U(y_0))$ は空集合ではなく，f が連続なら開集合である．したがって $f^{-1}(U(y_0)) = X$. それ以外の Y の点 $y \neq y_0$ に対して，ハウスドルフ性より，交わらない y_0 の開近傍 $U(y_0)$ と y の開近傍 $U(y)$ が存在する．$f^{-1}(U(y_0))$，$f^{-1}(U(y))$ も交わらず，また f の連続性より開集合．したがって $f^{-1}(U(y))$ は空集合．これがすべての $y \neq y_0$ で成立し，したがって $f \equiv y_0$.

2）$x \neq y$ で距離 $d(x, y) = 1$ となる距離から導かれる位相を距離空間 (X, d) に入れる．X のすべての部分集合は開集合なので，任意の位相空間への任意の写像 $f : X \to (Y, \mathcal{V})$ は連続.

コンパクトの概念も位相空間での概念に一般化できる．実際，定義 7.38 の定式化をそのまま使うことができる．しかし点列コンパクト性は一般には成立しない.

7章の演習

1）以下の結果を点列コンパクト性を使う証明と被覆の性質を使った証明の二通りで示せ.

$K_n \neq \emptyset$ を距離空間のコンパクト部分集合の列で

$$K_{n+1} \subset K_n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

となるものとする．このとき

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset.$$

K_n が閉集合でしかないとき，この結果は成立しない．そのような例を挙げよ．

2) (X, d) を距離空間，$f, g : X \to \mathbb{R}$ を連続写像とする．

$$\varphi(x) := \max(f(x), g(x))$$
$$\psi(x) := \min(f(x), g(x))$$

もまた連続．これを使って f が連続であれば $|f|$ も連続であることを示せ．

3) $p \geq 1 (p \in \mathbb{R})$，$p = \infty$ に対して

$$S_p := \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\|_p = 1\}$$

を決定せよ．また $p = 1, 2, \infty$ のとき図示せよ．

4) K を距離空間のコンパクト部分集合，$(U_i)_{i\in I}$ を K の開被覆とする．ある $\delta > 0$ が存在し，すべての $x \in K$ に対して，ある $i \in I$ が存在して

$$U(x, \delta) \subset U_i$$

となることを示せ．

5) $I, J \subset \mathbb{R}$ をコンパクトな区間，$f : I \times J \to \mathbb{R}$ 連続とする．$F : I \to \mathbb{R}$ を $F(x) := \sup\{f(x, y) : y \in J\}$ で定義する．F が連続であることを示せ．

6) 以下の $A \subset X$ に対して，境界 ∂A を決定せよ．

a) $A = \mathbb{Q}$（有理数），$X = \mathbb{R}$.

b) $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, X = \mathbb{R}$.

c) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}, X = \mathbb{R}$.

d) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}, X = \mathbb{R}^2$.

e) $A = C^1([0,1]), X = C^0([0,1])$.

f) X 距離空間, $A = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, を $(x_n) \subset X$ が $x \in X$ に収束するものとする.

7) M を距離空間の部分集合で閉包を $\bar{M}$, 内部を $\mathring{M}$ とする. $\bar{M}$ は M を含む最小の閉集合(つまり A が閉集合で $M \subset A$ であれば $\bar{M} \subset A$) であること, また $\mathring{M}$ が M に含まれる最大の開集合(つまり Ω が開集合で $\Omega \subset M$ であれば $\Omega \subset \mathring{M}$) であることを示せ.

8) $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ を可逆な $d \times d$ 行列(成分は実数)全体の集合とする. $\mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$ は連結でないことを示せ.

(ヒント：$\det : \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を使う. ただしここで $\det(A)$ は A の行列式.)

9) 距離空間の有界だが全有界でない部分集合を構成せよ.

10) 以下の $\mathbb{R}^2$ の部分集合で連結なものはどれか？

a) $\Omega_1 := \{(x,y) : x \neq 0 : y = \sin \frac{1}{x}\}$.

b) $\Omega_2 := \Omega_1 \cup \{(0,0)\}$.

c) $\Omega_3 := \Omega_1 \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$.

11) バナッハ空間 B の線形写像 $L : B \to B$ で連続でないものを構成せよ.

第III部

ユークリッド空間，バナッハ空間における微積分

第 8 章

バナッハ空間における微分

［バナッハ空間間の写像の微分可能性の概念を導入し，微分の初等的な公式を導く．］

定義 8.1 V, W をバナッハ空間，$\Omega \subset V$ を開集合，$f : \Omega \to W$ を写像，$x_0 \in \Omega$ とする．連続な線形写像 $L =: Df(x_0) : V \to W$ が存在して

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \tag{1}$$

を満たすとき，写像 f は x_0 で微分可能であるという．

$Df(x_0)$ を f の x_0 での微分といい，すべての $x_0 \in \Omega$ で微分可能なとき，f は Ω で微分可能という．

$Df(x_0)$ が線形写像として連続であることは，$Df(x_0)$ が x_0 に連続に依存することを意味しないことに注意せよ．

補題 8.2 f が x_0 で微分可能とする（定義 8.1 の設定で）と，$Df(x_0)$ は唯一つに決まる．

証明 $L_1, L_2 : V \to W$ を線形写像で (1) を満たすものとする．

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\|L_1(x - x_0) - L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

であることは容易にわかる．よって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$\|x - x_0\| < \delta$ のとき

$$\|(L_1 - L_2)(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|})\| = \frac{\|(L_1 - L_2)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} < \varepsilon.$$

$\|y\| = 1$ となる任意の $y \in V$ に対して，ある $x \in V$ で $\|x - x_0\| < \delta$, $\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} = y$ となるものが存在する．したがって任意の $\varepsilon > 0$, $\|y\| = 1$ となる任意の $y \in V$ に対して

$$\|(L_1 - L_2)(y)\| < \varepsilon$$

となる．つまり $\|L_1 - L_2\| \leq \varepsilon$. ε は任意だったので $L_1 = L_2$. □

補題 8.3 f を x_0 で微分可能(定義 8.1 の設定で)とすると，f は x_0 で連続.

証明 等式(1)より，ある $\eta > 0$ が存在して，$\|x - x_0\| < \eta$ に対して

$$\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\| \leq \|x - x_0\|$$

が成立，よって

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq (1 + \|L\|)\|x - x_0\|.$$

$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \min(\eta, \frac{\varepsilon}{1+\|L\|}) > 0$ ととると，$\|x - x_0\| < \delta$ である x で

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

を得る．これより f の x_0 での連続性を得る． □

例 1) $f : \Omega \to W$ を定数値写像とする．f は Ω で微分可能で，微分 $Df(x_0)$ はすべての $x_0 \in \Omega$ で $B(V, W)$ の零元である．

2) 任意の $L \in B(V, W)$ は V 上，微分可能で，すべての $x_0 \in V$ で

$$DL(x_0) = L$$

である．なぜなら

$$L(x) - L(x_0) - L(x - x_0) = 0 \ (\forall\, x \in V).$$

3) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ が $x_0 \in \Omega$ で微分可能であれば，微分 $Df(x_0)$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像であり，$(n \times m)$-行列と同一視できる．有限次元ベクトル空間間の線形写像は自動的に連続であることに注意せよ．

4）特に，$\Omega \subset \mathbb{R}$ を開集合，$f : \Omega \to \mathbb{R}$ とする．f が $x_0 \in \Omega$ で微分可能なのは，$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ となるとき，またそのときに限る．（$f'(x_0) = Df(x_0)(1)$ がわかる．） 線形写像 $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 実数 $L(1)$ で定まる．

5）$W = W_1 \times \ldots \times W_n$ をバナッハ空間の積とする．

$$\|y\| := \max_{i=1,\ldots,n} \|y^i\|_{W_i} \ (\ y = (y^1, \ldots, y^n) \in W)$$

とおくと，W もバナッハ空間.

$L = (L_1, \ldots, L_n) \in L(V, W)$ に対して，

$$\|L\| = \max_{i=1,\ldots,n} \|L_i\|.$$

Ω をバナッハ空間 V の開部分集合とする．

写像 $f = (f^1, \ldots, f^n) : \Omega \to W$ が $x_0 \in \Omega$ で微分可能なのは，各 $f^i (i = 1, \ldots, n)$ が微分可能であるとき，またそのときに限る．このとき

$$Df(x_0) = (Df^1(x_0), \ldots, Df^n(x_0)).$$

補題 8.4（定義 8.1 の仮定の下に）f，g は x_0 で微分可能とし，$\lambda \in \mathbb{R}$ とする．このとき $f + g, \lambda f$ もまた x_0 で微分可能である．

証明は明らか.

定理 8.5 （連鎖律）V, W, U をバナッハ空間，$\Omega \subset V$ 開集合，$x_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to W$ を x_0 で微分可能とし，さらに $\Sigma \subset W$ を $y_0 := f(x_0) \in \Sigma$ となる開集合，$g : \Sigma \to U$ を y_0 で微分可能とする．$g \circ f$ が x_0 の開近傍で定義され，x_0 で微分可能で

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(y_0) \circ Df(x_0).$$

証明 補題 8.3 より，f は x_0 で連続なので，ある開集合 $\Omega' \subset \Omega$ があって $f(\Omega') \subset \Sigma$ となる．したがって写像 $g \circ f$ が Ω' で定義される．

さて $x \in \Omega'$ に対して

$$\begin{aligned}&\|g(f(x))-g(f(x_0))-Dg(y_0)\circ Df(x_0)(x-x_0)\|\\&\le\|g(f(x))-g(f(x_0))-Dg(y_0)(f(x)-f(x_0))\|\\&+\|Dg(y_0)(f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0))\|.\end{aligned}\tag{2}$$

$\varepsilon>0$ に対して，適当な $\sigma>0$ をとって $\|y-y_0\|<\sigma$ であれば

$$\|g(y)-g(y_0)-Dg(y_0)(y-y_0)\|\le\frac{\varepsilon}{2(1+\|Df(x_0)\|)}\|y-y_0\|\tag{3}$$

となるようにできる．

g は y_0 で微分可能なので，上のようにできる．次に $\|x-x_0\|<\eta_1$ に対して

$$\|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)\|\le\frac{\varepsilon}{2\|Dg(y_0)\|}\|x-x_0\|\tag{4}$$

となるように，$\eta_1>0$ をとる．最後に $0<\eta_2<\frac{\sigma}{1+\|Df(x_0)\|}$ を $\|x-x_0\|<\eta_2$ に対して

$$\|f(x)-f(x_0)\|\le(1+\|Df(x_0)\|)\|x-x_0\|\tag{5}$$

が成立するようにとる．f が x_0 で微分可能なので，これが可能である．

(5) より，$\|x-x_0\|<\eta_2$ に対して

$$\|f(x)-f(x_0)\|\le\sigma\tag{6}$$

を得る．$\delta:=\min(\eta_1,\eta_2)$ とおく．$\|x-x_0\|<\delta$ に対して

$$\|g(f(x))-g(f(x_0))-Dg(y_0)\circ Df(x_0)(x-x_0)\|\le\varepsilon\|x-x_0\|$$

が (2), (3), (5), (6), (4) よりわかる．

$\varepsilon>0$ は任意なので，

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}}\frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-Dg(y_0)\circ Df(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}=0$$

を得，したがって定理を示せた．　□

定理 8.6 (平均値の定理) $I=[a,b]$ を $\mathbb{R}$ のコンパクトな区間，W をバナッハ空間，$f:I\to W$ を I 上連続で，I の内部 $\mathring{I}$ で微分可能で

$$\|Df(x)\|\le M\quad(\forall\,x\in\mathring{I})\tag{7}$$

とする．このとき

$$\|f(b) - f(a)\| \le M(b-a). \tag{8}$$

証明　任意の $\eta > 0$ で

$$\|f(b) - f(a)\| \le M(b-a) + \eta(b-a) \tag{9}$$

が成立すれば，$\eta > 0$ は任意なので，不等式(8)を得る．

これを示すために

$$A := \{\xi \in I : a \le z < \xi \text{ となる } \forall z \text{ で，} \\ \|f(z) - f(a)\| \le M(z-a) + \eta(z-a)\}$$

とおく．$a \in A$ なので，集合 A は空集合ではない．

$$c := \sup A$$

とする．f は連続なので，$c \in A$, したがって $A = [a, c]$. (9) を示すには $c = b$ をいえばよい．

$c < b$ と仮定する．$c + \delta \le b$ となる $\delta > 0$ があり，微分の定義より

$$\forall z \in [c, c+\delta) : \|f(z) - f(c) - Df(c)(z-c)\| \le \eta(z-c).$$

これより $z \in [c, c+\delta)$ で

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(a)\| &\le \|f(z) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\le M(z-c) + \eta(z-c) + M(c-a) + \eta(c-a) \\ &= M(z-a) + \eta(z-a). \end{aligned}$$

$z > c$ で(9)が成立するので，$c = b$ でなければ c の定義に矛盾．$c = b$ という主張が確かめられた．□

系 8.7 V, W をバナッハ空間，$x, y \in V$, $S := \{x + t(y-x) : 0 \le t \le 1\}$ を x と y を結ぶ線分，U を S の開近傍とする．$f : U \to W$ が S の各点で連続，微分可能で

$$\|Df(z)\| \le M \ (\forall\, z \in S)$$

を満たすとき

$$\|f(y)-f(x)\| \leq M\|y-x\|.$$

証明　$I=[0,1]\subset\mathbb{R}$ とおき $g:I\to W$ を

$$g(t)=f(x+t(y-x))$$

で定義する．連鎖律(定理 8.5)より g は $t\in(0,1)$ の各点で微分可能で

$$Dg(t)=Df(x+t(y-x))\cdot(y-x).$$

定理 8.6 より主張がでる．□

後のために次のことにも注意しておく．

補題 8.8 V,W をバナッハ空間，$x,y\in V, S:=\{x+t(y-x):0\leq t\leq 1\}$，$U$ を S の開近傍，$f:U\to W$ を微分可能とする．

任意の $z\in U$ で

$$\|f(y)-f(x)-Df(z)(y-x)\| \leq \|y-x\|\sup_{\xi\in S}\|Df(\xi)-Df(z)\|.$$

証明　$g:U\to W$ を

$$g(\zeta)=f(\zeta)-Df(z)\cdot\zeta$$

で定義し，系 8.7 を関数 $g:U\to W$ に適用する．関数 g は微分可能で

$$Dg(\zeta)=Df(\zeta)-Df(z).$$

□

定義 8.9 V,W をバナッハ空間，$\Omega\subset V$ を開集合，$f:\Omega\to W$ を微分可能とし，$x\in\Omega$ での微分を $Df(x)$ とおく．$Df(x)$ が x に関して連続であるとき，f は Ω で連続微分可能という．

固定した x_0 に対する線形写像 $Df(x_0)$ の連続性は，x_0 での微分可能性の必要条件の一つであるが，上の定義における，x の関数としての Df の連続性と異なる概念であることは重要である．

定義 8.10 $V=V_1\times\cdots\times V_d$ ($V_1,\ldots,V_d$ はバナッハ空間),Ω を V の開集合，$a=(a^1,\ldots,a^d)\in\Omega$ とする．Ω からバナッハ空間への写像 f は，写像

$x^j \mapsto f(a^1,\ldots,a^{j-1},a^j+x^j,a^{j+1},\ldots,a^d)$ が $x^j=0$ で微分可能であるとき，j 番目 ($j\in\{1,\ldots,d\}$) の変数に関して a で偏微分可能であるという．この微分を $D_jf(a)$ で表し，f の a での j 方向の偏微分という．

補題 8.11 記号は定義 8.10 と同じとする．f を a で微分可能とすると，f はすべての変数に関して a で偏微分可能で，すべての $v=(v^1,\ldots,v^d)\in V_1\times\cdots\times V_d$ に対して，

$$Df(a)(v^1,\ldots,v^d)=D_1f(a)v^1+\ldots+D_nf(a)v^d \tag{10}$$

が成り立つ．

証明 $j=1,\ldots,d$ に対して，$i_j: V_j\to V$

$$v^j\mapsto(0,\ldots,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{ 番目}}}{v^j},\ldots,0)$$

を標準埋め込みとする．これは連続線形，したがって変数 i_j に関して微分可能．連鎖律より $D_jf(a)$ が存在する．なぜなら，$x^j=0$ で写像 $f(a+i_j(x^j))$ の微分が存在し，

$$D_jf(a)=Df(a)\circ i_j \tag{11}$$

で与えられる．等式(10)は $v=\sum_{j=1}^d i_j(v^j)$ より従う．□

後に補題 8.11 の逆が成立しないことを例で見る．つまりすべての変数に関して偏微分可能であっても，必ずしも微分可能であるとは限らない．しかし，次は成り立つ．

定理 8.12 $V_1,\ldots,V_d,W$ をバナッハ空間，$V=V_1\times\cdots\times V_d,\Omega\subset V$ を開集合とする．写像 $f:\Omega\to W$ が Ω で連続微分可能なのは，Ω で 1 から d までの各変数に関して偏微分可能で，さらに偏微分が Ω 上連続なとき，またそのときに限る．もちろん，公式(10)が成立する．

証明 片方の向きは補題 8.11 と等式(11)よりの直接の帰結．逆方向に関しては $d=2$ の場合のみを扱う．一般の場合は帰納法で簡単に示せる．まず f が微分可能であることを示す．

以下を示せば十分である：$a\in\Omega$，$a=(a^1,a^2)$ とおく．任意の $\varepsilon>0$ に対

して $\delta > 0$ が存在して，すべての $\|t^1\|, \|t^2\| \le \delta$ となる $(t^1, t^2) \in V_1 \times V_2$ で

$$\begin{aligned} &\|f(a^1 + t^1, a^2 + t^2) - f(a^1, a^2) - D_1 f(a^1, a^2)t^1 - D_2 f(a^1, a^2)t^2\| \\ &\qquad \le \varepsilon \sup(\|t^1\|, \|t^2\|). \end{aligned} \tag{12}$$

(12)を示すために以下のように式を分割して

$$\begin{aligned} &f(a^1 + t^1, a^2 + t^2) - f(a^1, a^2) - D_1 f(a^1, a^2)t^1 - D_2 f(a^1, a^2)t^2 \\ &\quad = f(a^1 + t^1, a^2 + t^2) - f(a^1 + t^1, a^2) - D_2 f(a^1 + t^1, a^2)t^2 \qquad (13) \\ &\qquad + D_2 f(a^1 + t^1, a^2)t^2 - D_2 f(a^1, a^2)t^2 \\ &\qquad + f(a^1 + t^1, a^2) - f(a^1, a^2) - D_1 f(a^1, a^2)t^1. \end{aligned}$$

f は一番目の変数に関して偏微分可能なので，$\delta_1 > 0$ が存在して

$$\|t^1\| \le \delta_1 \text{ となる } \forall\, t^1 : \quad \|f(a^1 + t^1, a^2) - f(a^1, a^2) - D_1 f(a^1, a^2)t^1\| \le \frac{\varepsilon}{4}\|t^1\|. \tag{14}$$

$D_2 f$ の連続性より，$\delta_2 > 0$ が存在して

$$\|t^1\|, \|t^2\| \le \delta_2 \text{ となる } \forall\, t = (t^1, t^2) : \quad \|D_2 f(a^1 + t^1, a^2 + t^2) - D_2 f(a^1, a^2)\| \le \frac{\varepsilon}{4}. \tag{15}$$

これより，まず $\|t^1\|, \|t^2\| \le \delta_2$ で

$$\|D_2 f(a^1 + t^1, a^2)t^2 - D_2 f(a^1, a^2)t^2\| \le \frac{\varepsilon}{4}\|t^2\|. \tag{16}$$

さらに，補題 8.8 より

$$\begin{aligned} &\|f(a^1 + t^1, a^2 + t^2) - f(a^1 + t^1, a^2) - D_2 f(a^1 + t^1, a^2)t^2\| \\ &\quad \le \|t^2\| \sup_{\|\tau\| \le \|t^2\|} \|D_2 f(a^1 + t^1, a^2 + \tau) - D_2 f(a^1 + t^1, a^2)\| \\ &\quad \le \frac{\varepsilon}{2}\|t^2\| \qquad ((15) \text{ より}). \end{aligned} \tag{17}$$

$\|t^1\|, \|t^2\| \le \delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ であれば，(13)，(14)，(16)，(17) より (12) を得る．

(10) よりさらに(補題 8.11)

$$Df(a^1,a^2)(t^1,t^2) = D_1f(a^1,a^2)t^1 + D_2f(a^1,a^2)t^2$$

を得，これより Df の連続性が D_1f, D_2f の連続性よりでる． □

次に高階微分を定義する．

定義 8.13 V, W をバナッハ空間，$\Omega \subset V$ を開集合，$x_0 \in \Omega, f : \Omega \to W$ を微分可能写像とする．微分 Df が x_0 で微分可能であれば f は x_0 で 2 回微分可能といい，x_0 での Df の微分を $D^2f(x_0)$ で表す．

f は Ω から W への写像で，Df は Ω から $B(V,W)$ への写像であり，$B(V,W)$ はまたバナッハ空間なので $D^2f(x_0) \in B(V,B(V,W))$ であることを注意する．

$B(V,B(V,W))$ の元を $V \times V$ から W への連続双線形写像と同一視する．つまり $L \in B(V,B(V,W))$, $x,y \in V$ に対して

$$L(x,y) := (L(x))(y) \tag{18}$$

とおく．(右辺では L は x に元 $L(x) \in B(V,W)$ を対応させ，これを $y \in V$ に作用させる.) 明らかに，$L(x,y)$ は連続で x, y に関して線形．$L \in B(V,B(V,W))$ は，

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} \|(L(x))(y)\| \\ &= \sup_{\|x\|,\|y\|=1} \|L(x,y)\|. \end{aligned} \tag{19}$$

よって

$$\|L(x,y)\| \le \|L\|\|x\|\|y\| \quad \forall\, x,y \in V. \tag{20}$$

(20) と同様の構成と不等式が階数 $k \ge 2$ の微分作用素に関しても成立する．

定理 8.14 定義 8.13 の記号を使う．f を x_0 で 2 回微分可能とする．このとき連続双線形写像 $D^2f(x_0)$ は対称，すなわち $s,t \in V$ で

$$D^2f(x_0)(s,t) = D^2f(x_0)(t,s).$$

証明　$U(x_0, 2\sigma) \subset \Omega$ とする．

$$\varphi : [0,1] \to W$$
$$\varphi(\tau) := f(x_0 + \tau s + t) - f(x_0 + \tau s) \qquad (\|s\|, \|t\| \le \sigma).$$

を考える．補題 8.8 より，

$$\|\varphi(1) - \varphi(0) - D\varphi(0)\| \le \sup_{\tau \in [0,1]} \|D\varphi(\tau) - D\varphi(0)\|. \tag{21}$$

連鎖律より

$$\begin{aligned} D\varphi(\rho) &= (Df(x_0 + \rho s + t) - Df(x_0 + \rho s))s \\ &= (Df(x_0 + \rho s + t) - Df(x_0) - D^2 f(x_0)\rho s)s \\ &\quad - (Df(x_0 + \rho s) - Df(x_0) - D^2 f(x_0)\rho s)s\,. \end{aligned}$$

仮定から，$\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し，$\|s\|, \|t\| \le \delta$ で，$0 \le \rho \le 1$

$$\|Df(x_0 + \rho s + t) - Df(x_0) - D^2 f(x_0)(\rho s + t)\| \le \varepsilon(\|s\| + \|t\|),$$
$$\|Df(x_0 + \rho s) - Df(x_0) - D^2 f(x_0)(\rho s)\| \le \varepsilon\|s\|.$$

これより

$$\|D\varphi(\rho) - (D^2 f(x_0)t)s\| \le 2\varepsilon(\|s\| + \|t\|)\|s\|. \tag{22}$$

さらに(21)，(22)より $\rho = 0$，$\rho = \tau$ に対して

$$\begin{aligned} &\|\varphi(1) - \varphi(0) - (D^2 f(x_0) \cdot t)s\| \\ &\qquad \le \|\varphi(1) - \varphi(0) - D\varphi(0)\| + \|D\varphi(0) - (D^2 f(x_0)t)s\| \\ &\qquad \le 6\varepsilon(\|s\| + \|t\|)\|s\|. \end{aligned} \tag{23}$$

$\varphi(1) - \varphi(0) = f(x_0 + s + t) - f(x_0 + s) - f(x_0 + t) + f(x_0)$ は s，t に関して対称で，したがって(23)で s と t を交換することができ，$\|s\|, \|t\| \le \delta$ に対して

$$\|(D^2 f(x_0)t)s - (D^2 f(x_0)s)t\| \le 6\varepsilon(\|s\| + \|t\|)^2 \tag{24}$$

を得る．s，t のかわりに $\lambda s, \lambda t$ $(\lambda > 0)$ を使うと，(24)の両辺が定義され

$|\lambda|^2$ 倍される．したがって $\lambda=\delta$ ととれば，(24) が $\|s\|=1=\|t\|$ に対しても成立するので，$\|s\|=1=\|t\|$ となるすべての s,t で

$$\|D^2 f(x_0)(t,s)-D^2 f(x_0)(s,t)\| \le 24\varepsilon.$$

ε は任意なので，

$$D^2 f(x_0)(t,s)=D^2 f(x_0)(s,t).$$

□

系 8.15 $V_1,\dots,V_d,W$ をバナッハ空間，$V=V_1\times\dots\times V_d, \Omega\subset V$ を開集合，$x_0\in\Omega$ とする．$f:\Omega\to W$ が x_0 で 2 回連続微分可能であれば，すべての偏微分 $D_kD_jf(x_0)$,$k,j=1,\dots,d$ が存在し，$t_\alpha=(t_\alpha^j)_{j=1,\dots,d}, \alpha=1,2$ に対して

$$D^2 f(x_0)(t_1,t_2)=\sum_{j,k=1,\dots,d} D_kD_jf(x_0)(t_1^k,t_2^j).$$

特に

$$D_kD_jf(x_0)=D_jD_kf(x_0)\ (\forall j,k).$$

したがって f はすべての 2 階偏微分が存在し，連続であるとき，またそのときに限り Ω で 2 回連続微分可能である．

証明　定理 8.12，8.14 よりの直接の帰結．

高階微分 D^kf に関して，ほぼ同様の結果が成立する．これらの結果は帰納法によって得られるので，詳細は省略する．

定義 8.16 V,W をバナッハ空間，$\Omega\subset V$ を開集合，$k\in\mathbb{N}$ とする．

$$C^k(\Omega,W):=\{f:\Omega\to W, f\ \ \Omega\text{で } k \text{ 回連続微分可能}\}$$

$$C^\infty(\Omega,W):=\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega,W).$$

最後にテイラー (Taylor) の公式を学ぶ．

定理 8.17 Ω をバナッハ空間 V の開集合，$x_0\in\Omega, t\in V$ とし，$\{x_0+\tau t, 0\le\tau\le 1\}\subset\Omega, f\in C^{k+1}(\Omega,\mathbb{R})$ $(k\in\mathbb{N})$ と仮定する．

このとき，ある $\theta \in (0,1)$ が存在して

$$f(x_0+t) = f(x_0) + Df(x_0)t + \frac{1}{2!}D^2 f(x_0)(t,t) + \ldots + \frac{1}{k!}D^k f(x_0)\underbrace{(t,\ldots,t)}_{k}$$
$$+ \frac{1}{(k+1)!}D^{k+1}f(x_0+\theta t)\underbrace{(t,\ldots,t)}_{(k+1)}. \tag{25}$$

証明

$$g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(\tau) := f(x_0+\tau t)$$

を考える．連鎖律と帰納法より g が $(k+1)$ 回連続微分可能であり，微分は

$$D^j g(\tau) = D^j f(x_0+\tau t)\underbrace{(t,\ldots,t)}_{j}\ (1\le j\le k+1) \tag{26}$$

で与えられる．一変数の関数に関するテイラー級数(定理 3.15 を見よ)より

$$g(1) = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}D^j g(0) + \frac{1}{(k+1)!}D^{k+1}g(\theta) \quad (\exists\theta\in(0,1)). \tag{27}$$

(26)，(27) より (25) を得る．□

系 8.18 (テイラー展開) V をバナッハ空間，$\Omega\subset V$ を開集合，$x_0\in\Omega, \delta > 0, U(x_0,\delta)\subset\Omega$，$f\in C^k(\Omega,\mathbb{R})$ とする．$\|t\|<\delta$ となる任意の $t\in V$ で

$$f(x_0+t) = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}D^j f(x_0)\underbrace{(t,\ldots,t)}_{j} + r_{k+1}(t).$$

ただしここで

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\frac{r_{k+1}(t)}{\|t\|^k} = 0.$$

証明　定理 8.17 より，ある $\theta\in[0,1]$ で

$$f(x_0+t) = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}D^j f(x_0)(t,\ldots,t) + r_{k+1}(t)$$
$$\left(ここで\ r_{k+1}(t) = \tfrac{1}{k!}(D^k f(x_0+\theta t) - D^k f(x_0))\underbrace{(t,\ldots,t)}_{k}\right).$$

$D^k f(x)$ は仮定より連続なので $0 \le \theta \le 1$ で $\lim_{t\to 0}(D^k f(x_0+\theta t) - D^k f(x_0)) = 0$, したがって $\lim_{t\to 0} \frac{r_{k+1}(t)}{\|t\|^k} = 0$. □

8章の演習

1) $\mathbb{R}^d$ で

$$f_1(x) := \|x\|_1$$
$$f_2(x) := \|x\|_2$$
$$f_\infty(x) := \|x\|_\infty$$

を考える．この関数が微分可能な x の範囲を求めよ．また，微分が存在するとき微分を計算せよ．

2) $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$f(x) := \frac{x^1(x^2)^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad (x \neq 0), f(0) := 0$$

を考える．任意の $x, \xi \in \mathbb{R}^2$ で

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(x+t\xi) - f(x)}{t} =: g(x,\xi)$$

が存在することを示せ．写像 $\xi \mapsto g(0,\xi)$ は線形ではない．これより f は $0 \in \mathbb{R}^2$ で微分可能ではないことを示せ．

3) V, W をバナッハ空間，$\Omega \subset V$ 連結な開集合 $f : \Omega \to W$ を微分可能で

$$Df(x) = 0 \quad (\forall\, x \in \Omega)$$

とする．f が定数であることを示せ．

4)

$$f(\xi,\eta) := \frac{\xi - \eta}{\xi + \eta} \quad (\xi + \eta \neq 0)$$

の $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ におけるテイラー展開を 2 階まで求めよ．

5) Ω をバナッハ空間 $V = V_1 \times \cdots \times V_d$ の開集合とし，定義 8.10 のように，$f : \Omega \to \mathbb{R}$ 偏微分が存在し Ω で有界な関数とする．このとき f は Ω で連続であることを示せ．

（ヒント：$i = 1, \ldots, d, \kappa_0 = 0$ に対して $h = (h^1, \ldots h^d) \in V_1 \times \cdots \times V_d, \kappa_i = (h^1, \ldots, h^i, 0, \ldots, 0)$ とおく．$x \in \Omega$ に対し

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{d} (f(x+\kappa_i) - f(x+\kappa_{i-1}))$$

とおき平均値の定理を適用せよ.)

第9章

$\mathbb{R}^d$ における微積分

［前章の結果の特別な場合としてユークリッド空間を見る．3 章同様，微分可能関数の極値(問題)を学ぶ．ラプラシアンなど，標準的な微分作用素を導入する．］

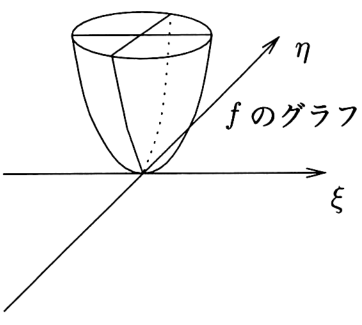
A　スカラー値関数

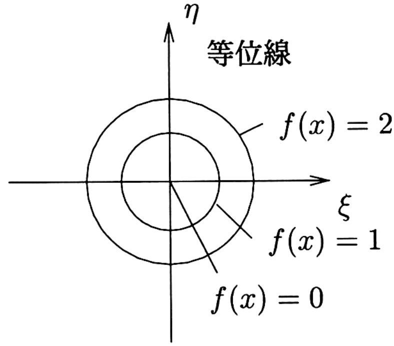
この章では，Ω は $\mathbb{R}^d$ の開集合，$f:\Omega\to\mathbb{R}$ を関数とする．

定義 9.1 f のグラフ Γ_f を $\Gamma_f := \{(x,y)\in\Omega\times\mathbb{R} : f(x)=y\}\subset\mathbb{R}^{d+1}$ で定義する．さらに $c\in\mathbb{R}$ に対して $N_f(c) := \{x\in\Omega : f(x)=c\}\subset\mathbb{R}^d$ を f の c-等位面という．$d=2$ のとき等位面は等位線ともいう．

例　$\mathbb{R}^2$ で例を見る．$x\in\mathbb{R}^2$ を $x=(x^1,x^2)$ と書くかわりに $x=(\xi,\eta)$ と書く．以下の例では Ω は常に $\mathbb{R}^2$ とする．

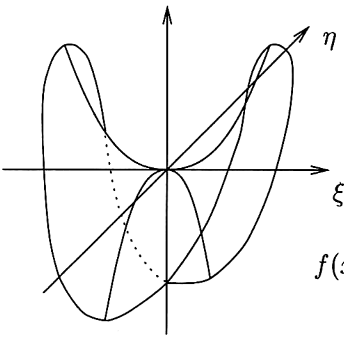
1）$f(\xi,\eta)=\xi^2+\eta^2$

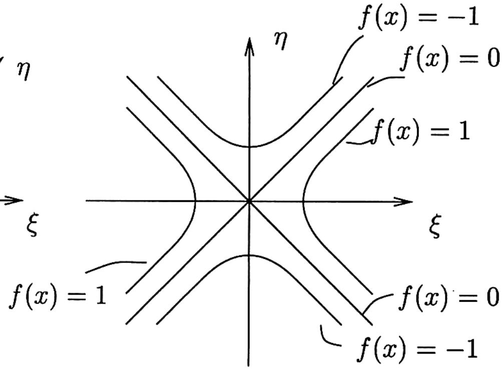




f のグラフは放物面で，これは上方に開いていて等位線は原点を中心とする円となる．

2）$f(\xi,\eta)=\xi^2-\eta^2$

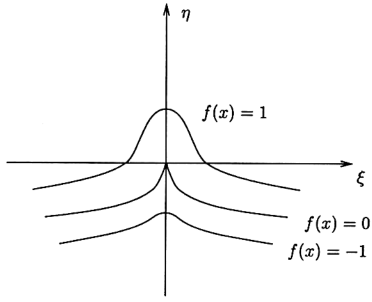




この例で等位線は一点に退化したり，自己交叉することがあることがわかる．

3）　$f(x)=\xi^2+\eta^3$

この場合グラフは3つの方向（ξ の正の方向，負の方向，η の正の方向）に値が増え，η の負の方向にのみ値が減る．等位線 $\{f(x)=0\}$ は原点で頂点を持つ．



$\mathbb{R}^d$ を常に

$$\mathbb{R}^d=\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{d}$$

と分解する．以下，$\mathbb{R}^d$ にはユークリッドノルム $\|\cdot\|_2$ を入れておく．指数2は省くこともある．さらに e^i を x^i 軸の正の方向の単位ベクトルとする．この約束の下で，$x=\sum_{i=1}^d x^ie_i$, $y=\sum_{i=1}^d y^ie_i$ に対して

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{d} x^i y^i$$

とおくと，これは $\mathbb{R}^d$ の普通の内積である．特に

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

$$\|e_i\|_2 = 1 \ (i = 1, \ldots, d)$$

である．f の i 方向の偏微分を

$$D_i f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} =: \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}$$

が存在するとき，その値で定義する．

より一般に以下のように定義する．

定義 9.2 Ω を $\mathbb{R}^d$ の開集合，$f : \Omega \to \mathbb{R}$ を関数，$v \in \mathbb{R}^d$ を $\|v\|_2 = 1$ となるものとする．f の v 方向の方向微分を

$$D_v f(x) := \frac{d}{dh} f(x + hv)\Big|_{h=0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

が存在するとき，その極限値で定義する．

さらに

定義 9.3 $f : \Omega \to \mathbb{R}$($\Omega$ は $\mathbb{R}^d$ の開集合)は $x \in \mathbb{R}^d$ で偏微分可能とする．f の x での勾配をベクトル場

$$\nabla f(x) := \operatorname{grad} f(x) := (\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^d}(x))$$

で定義する．

補題 9.4 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を x で微分可能，$v \in \mathbb{R}^d$ を $\|v\|_2 = 1$ を満たすベクトルとする．

$$D_v f(x) = Df(x)(v) = \langle \nabla f(x), v \rangle . \tag{1}$$

証明 f は微分可能なので

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\|f(x+hv)-f(x)-Df(x)(hv)\|}{\|hv\|}=0\,.$$

これより

$$D_vf(x)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x+hv)-f(x)}{h}=Df(x)(v)$$

で，前章の公式(10) ($(v=(v^1,\ldots,v^d)$) より

$$Df(x)(v)=\sum_{i=1}^{d} D_if(x)v^i=\langle\,\mathrm{grad}\,f(x),v\rangle$$

を得る．　□

したがって，微分 $Df(x)$ は $\nabla f(x)$ と内積をとることで得られる．別の言い方をすると，ベクトル $\nabla f(x)$ は線形関数 $Df(x)$ の双対である．さらに(1)より，$\nabla f(x)\neq 0$ であれば $\|D_vf(x)\|$ は $\|v\|=1$ を満たす v 全体の中で最大値を $v=\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ でとる．これは $\nabla f(x)$ が f の最急勾配の方向を与えていることを表している．一方，$D_vf(x)=0$ であれば

$$\langle\,\mathrm{grad}\,f(x),v\rangle=0$$

なので，このような v は $\nabla f(x)$ に直交する (内積に関して)．後で，このことは $\nabla f(x)$ が f の等位面に直交していることを意味することを見る．

例　1) 以下の例を考えよ．

$$f(x)=\frac{\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}\quad (\xi,\eta)\neq(0,0),$$
$$f(0)=0.$$

$(\xi,\eta)\neq(0,0)$ で f は ξ，η に関して偏微分可能で

$$\frac{\partial f(x)}{\partial\xi}=\frac{\eta(\eta^2-\xi^2)}{(\eta^2+\xi^2)^2},\quad \frac{\partial f(x)}{\partial\eta}=\frac{\xi(\xi^2-\eta^2)}{(\xi^2+\eta^2)^2}.$$

f はまた原点でも ξ，η に関して微分可能である．実際，

$$f(\xi,0)=0\ (\forall\,\xi)$$

であり，したがって

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \xi} = 0,\ \text{同様に}\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial \eta} = 0.$$

しかしながら f は原点では連続でないことが

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} f(h,h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{h^2}{h^2 + h^2} = \frac{1}{2} \neq f(0)$$

よりわかる．

2）関数

$$g(x) = \frac{\xi\eta}{\xi^4 + \eta^4}, \qquad (\xi, \eta) \neq (0,0)$$
$$g(0) = 0$$

を考える．g も同様に各点で偏微分可能であるが，g は原点で不連続であるだけでなく，原点の近くで非有界である．実際

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} g(h,h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{h^2}{h^4 + h^4} = \infty.$$

定理 8.12 より，偏微分が存在し，さらに連続であればこのような現象は起こらない．

3）$x \in \mathbb{R}^d$ に対して，原点から x への距離 $r(x)$ を $r(x) = \|x\| = ((x^1)^2 + \cdots + (x^d)^2)^{\frac{1}{2}}$ で定義する．

$r(x) \neq 0$（すなわち $x \neq 0$）で

$$\frac{\partial r(x)}{\partial x^i} = \frac{1}{2((x^1)^2 + \ldots (x^d)^2)^{\frac{1}{2}}} 2x^i = \frac{x^i}{r}. \tag{2}$$

特に

$$\nabla r(x) = \frac{x}{r}\,(x \neq 0). \tag{3}$$

$$\|\nabla r(x)\| = \frac{\|x\|}{r} = \frac{r}{r} = 1.$$

よって $r(x)$ の勾配は x 方向の単位ベクトルである．

さらに r の等位面，つまり原点を中心とする同心球面，に直交する．

原点で $r(x)$ は偏微分可能ではない．例えば $r(x^1,0,\dots,0)=|x^1|$ は $x^1=0$ で微分可能ではない．

4) 関数 $f(x)$ はしばしば $r(x)$ のみに依存する．$\varphi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を微分可能，$f(x)=\varphi(r(x))$ とする．連鎖律より

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}=\frac{d\varphi(r(x))}{dr}\frac{\partial r(x)}{\partial x^i}=\frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{x^i}{r}\ (x\neq 0). \tag{4}$$

次に $f:\Omega\to\mathbb{R}$ の2階偏微分を調べる．

系8.15よりただちに

系 9.5 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ の2階偏微分が連続とする．このとき $x\in\Omega$，$i,j=1,\dots,d$ で

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}f(x)=\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^i}f(x).$$

ここで，

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i\partial x^j}:=\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\frac{\partial f(x)}{\partial x^j}\Big)$$

であることを意味する．

上の系で2階微分の連続性が実際に必要な条件であることを見るために，以下の例を考える．

$$f(x):=\begin{cases}\xi\eta\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2+\eta^2} & (\xi,\eta)\neq(0,0),\\ 0 & (\xi,\eta)=(0,0).\end{cases}$$

$$\frac{\partial f(0,\eta)}{\partial\xi}=-\eta \text{ がすべての } \eta \text{ で成り立つので } \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial\eta\partial\xi}=-1,$$

$$\frac{\partial f(\xi,0))}{\partial\eta}=\xi \text{ がすべての } \xi \text{ で成り立つので } \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial\xi\partial\eta}=1.$$

定義 9.6 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ を2回連続微分可能とする．f のヘッセ行列を

$$D^2f(x)=\Big(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i\partial x^j}\Big)_{i,j=1,\dots,d}$$

で定義する．

ここで系 8.15 を思い出すと，系 9.5 は以下を意味する．

系 9.7 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ を 2 回連続微分可能とする．f のヘッセ行列は対称である． □

スカラー値関数の極値を調べる．

定義 9.8 $x_0\in\Omega$ が $f:\Omega\to\mathbb{R}$ の極大値(極小値)を与えるとは x_0 のある近傍 $U\subset\Omega$ で

$$f(x)\le f(x_0)\ (f(x)\ge f(x_0))\ \forall x\in U \tag{5}$$

が成立することである．(5) で $x\neq x_0$ では $<$ ($>$) となるとき，x_0 は狭義極大値(極小値)をとる．または極値をとる点は孤立しているという．

定理 9.9 $x_0\in\Omega$ を $f:\Omega\to\mathbb{R}$ の極値を与える点，f は x_0 で偏微分可能とする．このとき $\nabla f(x_0)=0$.

証明 各 $i=1,\dots,d$ に対して

$$\varphi_i(h)=f(x_0+he_i)$$

を考える．関数 φ_i は $\mathbb{R}$ における 0 の近傍で微分可能で，φ_i は $h=0$ で極値をとる．1 変数関数に関する対応する定理

$$\begin{aligned}0=\frac{d}{dh}\varphi_i(h)_{|h=0}&=Df(x_0+he_i)\cdot\frac{d}{dh}(x_0+he_i)_{|h=0}\\&=Df(x_0)\cdot e_i=\frac{\partial}{\partial x^i}f(x_0),\ (i=1,\dots,d)\end{aligned}$$

より，主張が従う． □

次に $\nabla f(x_0)=0$ となる x_0 が極値となるかどうか，より正確には極大値または極小値であるかどうか，を判定する条件を調べる．1 変数関数の場合は，f の 2 階微分がこのような条件に係わっていた．そこで，f は x_0 で 2 回連続微分可能と仮定し，系 9.7 によりヘッセ行列 $D^2f(x_0)$ が対称であることを思い出す．

定義 9.10 対称な $(d\times d)$ 行列 A は

（i）
$$\langle v, Av\rangle > 0\ (< 0) \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$$
のとき正(負)定値といい

（ii）
$$\langle v, Av\rangle \geq 0\ (\leq 0) \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^d$$
のとき半正(負)定値という．

（iii）半正定値でも半負定置でもないとき不定値という．

不定値行列 A には，したがって
$$\langle v_1, Av_1\rangle > 0, \quad \langle v_2, Av_2\rangle < 0$$
となるような $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d$ が存在する．A が(半)負定値となるのは，$-A$ が(半)正定値のとき，またそのときに限る．

補題 9.11 対称な $(d \times d)$ 行列 A が正(負)定値なのは $\lambda > 0$ が存在して
$$\langle v, Av\rangle \geq \lambda\|v\|^2\ (\leq -\lambda\|v\|^2)\ (\forall v \in \mathbb{R}^d) \tag{6}$$
となるとき，またそのときに限る．

証明　"$\Leftarrow$" は自明．"$\Rightarrow$"：A が正定値の場合のみ扱う．$S^{d-1} := \{v \in \mathbb{R}^d : \|v\| = 1\}$. S^{d-1} は有界閉なので，系 7.40 より $\mathbb{R}^d$ のコンパクト部分集合．さらに関数
$$v \mapsto \langle v, Av\rangle = \sum_{i,j=1}^{d} v^i a_{ij} v^j\ (A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,d})$$
は連続．したがって $\langle v, Av\rangle$ は S^{d-1} で最小値 λ をとる．すなわち $v_0 \in S^{d-1}$ が存在し $\langle v_0, Av_0\rangle = \lambda$. 仮定より $\lambda > 0$ である．さらにすべての $w \in S^{d-1}$ で $\langle w, Aw\rangle \geq \lambda$.

これより $v \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ で $\langle \frac{v}{\|v\|}, A\frac{v}{\|v\|}\rangle \geq \lambda$, したがって $\langle v, Av\rangle \geq \lambda\|v\|^2$. 最後に(6)が $v = 0$ で成立することは明らかである．□

定理 9.12 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を 2 回連続微分可能とし，$x_0 \in \Omega$ で

$$\nabla f(x_0) = 0$$

とする．ヘッセ行列 $D^2 f(x_0)$ が

（i）正定値のとき，f は狭義極小値を x_0 でとる．つまり，x_0 の近傍 U が存在して

$$f(x) > f(x_0) \ (\forall\, x \in U \backslash \{x_0\}).$$

（ii）負定値のとき，f は狭義極大値を x_0 でとる．

(iii) 不定値のとき f は x_0 で極値をとらない．

証明　テイラー展開（系 8.18）より，$Df(x_0) = 0$ を用いると，$x_0 + \tau v \in \Omega$ $(0 \leq \tau \leq 1)$ となる $v \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0)(v, v) + r_3(v).$$

ここで

$$\lim_{\substack{v \to 0 \\ v \neq 0}} \frac{r_3(v)}{\|v\|^2} = 0. \tag{7}$$

$v = (v^1, \ldots, v^d)$ で

$$D^2 f(x_0)(v, v) = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j} v^i v^j = \langle v, D^2 f(x_0) v \rangle.$$

したがって $D^2 f(x_0)$ が正定値のとき，補題 9.11 より，ある $\lambda > 0$ が存在して

$$\langle v, D^2 f(x_0) v \rangle \geq \lambda \|v\|^2 \ (\forall\, v \in \mathbb{R}^d).$$

(7) より，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|r_3(v)| \leq \frac{\lambda}{4} \|v\|^2 \ (\,\|v\| \leq \delta). \tag{8}$$

これより $\|v\| \leq \delta$ に対して

$$f(x_0 + v) \geq f(x_0) + \frac{\lambda}{2}\|v\|^2 - \frac{\lambda}{4}\|v\|^2 = f(x_0) + \frac{\lambda}{4}\|v\|^2$$

であり，ゆえに f は x_0 で狭義極小値をとる．

$D^2f(x_0)$ が負定値のときは $D^2(-f(x_0))$ が正定値なので $-f$ は x_0 で狭義極小値をとり，したがって f は狭義極大値をとる．最後に $D^2f(x_0)$ が不定値のときは $\lambda_1, \lambda_2 > 0$，$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ が存在して

$$\begin{aligned} \langle v_1, D^2f(x_0)v_1 \rangle &\geq \lambda_1 \|v_1\|^2 \\ \langle v_2, D^2f(x_0)v_2 \rangle &\leq -\lambda_2 \|v_2\|^2 . \end{aligned} \tag{9}$$

$\lambda := \min(\lambda_1, \lambda_2)$ に対して，$\delta > 0$ を (8) のようにとる．λ はスケール変換 $v \mapsto tv, t \geq 0$ を行っても不変であるので $\|v_1\| = \delta = \|v_2\|$ と仮定する．

$$\begin{aligned} f(x_0 + v_1) &\geq f(x_0) + \frac{\lambda}{4}\|v_1\|^2 \\ f(x_0 + v_2) &\leq f(x_0) - \frac{\lambda}{4}\|v_2\|^2 . \end{aligned}$$

$\delta > 0$ はいくらでも小さくできるので，f は x_0 で極値をとらない．　□

例　この章の最初に挙げた例について極値を調べよう．

1) $f(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2$.

この場合 $\nabla f(x) = (2\xi, 2\eta)$ である勾配は $(0,0)$ でのみゼロになる．さらに

$$D^2f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

したがって f は 0 で極小値をとる．

2) $f(\xi, \eta) = \xi^2 - \eta^2, \nabla f(x) = (2\xi, -2\eta)$, なので，この例でも $\nabla f(0) = 0$.

しかし

$$D^2f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

は不定値であり，ゆえに極値をとらない．

3) $f(x) = \xi^2 + \eta^3, \nabla f(x) = (2\xi, 3\eta^2)$.

$$D^2f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は半正定値．この場合も原点で極値をとらない．

4） $f(x)=\xi^2+\eta^4, \nabla f(x)=(2\xi, 4\eta^3)$ で $\nabla f(0)=0$.

$$D^2 f(0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

は半正定値．この例では原点で狭義極小値をとる．

5） $f(x)=\xi^2, \nabla f(x)=(2\xi, 0)$ で $\nabla f(0)=0$.

$$D^2 f(0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

は半正定値．原点で極小値をとるが，狭義極小値ではない．証明抜きで対称行列が正定値であるための判定条件を以下のように与えよう．

補題 9.13 $A=(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,d}$ を対称行列，すなわちすべての i,j で $a_{ij}=a_{ji}$ とする．A が正定値であるのはすべての $\nu=1,\ldots,d$ で

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1\nu}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{\nu 1} & \ldots & a_{\nu\nu}\end{pmatrix}>0$$

のとき，またそのときに限る．A が負定値なのは，上の行列式が すべての奇数 ν で負で，すべての偶数 ν で正になるときである．

定義 9.14 ラプラス(Laplace)作用素 Δ を以下のように定義する．2 回微分可能関数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ に対して

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{(\partial x^d)^2}. \tag{10}$$

関数 $f\in C^2(\Omega)$ は方程式

$$\Delta f=0 \quad (\Omega\text{で}) \tag{11}$$

を満たすとき(Ω 上の)調和関数という．方程式(11)をラプラス方程式という．

例　定数関数，線形関数(一次関数)は明らかに調和関数である．$\mathbb{R}^2$ で，関数 $f(x) = \xi^2 - \eta^2$ は調和．もう少し自明でない例を与えよう．$f(x) = \varphi(r(x))$ の形の関数を考える．連鎖律より(補題 9.4 の直後の例(4)を参照)

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{d\varphi(r(x))}{dr}\frac{x^i}{r}.$$

したがって

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(r(x)) &= \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}\cdot\frac{x^i}{r}\cdot\frac{x^i}{r} + \frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{x^i}{r^3}x^i\right)\\ &= \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{(d-1)}{r}\frac{d\varphi}{dr} \qquad (12)\end{aligned}$$

が $\sum_{i=1}^{d} x^i x^i = r^2$ で成立する．特に

$$d = 2 \text{ のとき } \Delta\log(r(x)) = 0 \quad (x \neq 0),$$
$$d \geq 3 \text{ のとき } \Delta\frac{1}{r^{d-2}(x)} = 0 \; (\, x \neq 0).$$

これらの関数，すなわち $\log(r(x))$ または $r^{2-d}(x)$ を，それぞれの場合のラプラス方程式の基本解という[1]．

定義 9.15　(i)　$k > 0$ を定数(熱伝導率)とする．$(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ で x に関して 2 回微分可能，t に関して 1 回微分可能な関数 $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ に対して定義される方程式

$$\frac{1}{k}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - \Delta f(x,t) = 0$$

(Δ は(10)と同様)を熱方程式という．

(ii)　$c > 0$ を上と同様定数(波の伝播速度)，$f \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}), (x,t) \in$

---

[1] 普通はこれらを定数倍した

$$\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\log(r(x)) & d = 2,\\ \frac{1}{(2-d)\omega_d}r^{2-d}(x) & d \geq 3\end{cases}$$

を基本解という．

$\Omega \times \mathbb{R}_+$ とする．微分方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - \Delta f(x,t) = 0$$

(Δ は(10)と同様)を波動方程式という．

関数

$$k(x,t) := \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \ (x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0)$$

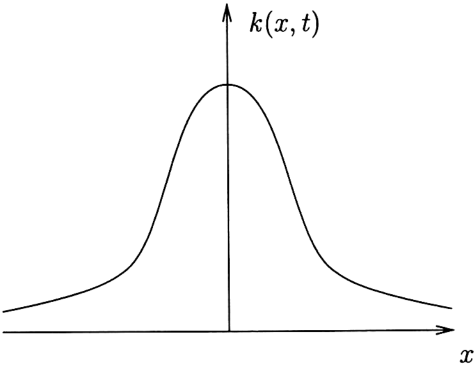
を考える[2]．(12)より，$\|x\| = r$, $\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{-r}{2t^{\frac{d}{2}+1}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$ を使うと，

$$\Delta k(x,t) = \left(\frac{r^2}{4t^{\frac{d}{2}+2}} - \frac{d}{2t^{\frac{d}{2}+1}}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right),$$
$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t} = \left(\frac{r^2}{4t^{\frac{d}{2}+2}} - \frac{d}{2t^{\frac{d}{2}+1}}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right).$$

したがって

$$\frac{\partial k(x,t)}{\partial t} - \Delta k(x,t) = 0,\ (x \in \mathbb{R}^d, t > 0).$$

関数 $k(x,t)$ を熱方程式の基本解と呼ぶ．$x \neq 0$ で，$\lim_{t \searrow 0} k(x,t) = 0$ で，$\lim_{t \searrow 0} k(0,t) = \infty$．またすべての x で $\lim_{t \to \infty} k(x,t) = 0$.



[2] これも普通は

$$k(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \ (x \in \mathbb{R}^d, t > 0)$$

を基本解という．

固定した $t>0$ に対して曲線 $k(x,t)$ は釣鐘型をしている．さらに t が小さければ小さいほど，尖った形になる．$n=1$ の場合を図に示した．

物理学においては，関数 $k(x,t)$ は $\mathbb{R}^d$ における時間 t での熱伝導を表している．この場合，初期値は一点に熱が集中しており無限に熱い熱源となっている．これは理想化された状況であるが，この理想化された状況を重ね合わせる（つまり積分する）ことで一般の初期状態を表すことができることを後で見る．また $k(x,t)$ の（固定した t で）描く釣鐘型は確率論で重要な役割を担っており，ガウス (Gauss) 分布と呼ばれる．

最後に波動方程式の解を調べる．$c>0$，$v\in\mathbb{R}^d, w=c\|v\|$ とすると

$$\sigma(x,t):=g(\langle v,x\rangle-wt)\quad (g\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})).$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sigma(x,t)-\Delta\sigma(x,t)=\frac{w^2}{c^2}g''-\|v\|^2g''=0.$$

したがって $\sigma(x,t)$ は波動方程式の解である．

ラプラス方程式，熱方程式，波動方程式は，以下に定義するあるクラスの偏微分方程式の典型的な例である．（常微分方程式と対比すると，偏微分方程式の「偏 (partial)」は未知関数が多変数であることを表している．）

定義 9.16 2 階線形微分作用素とは，$C^2(\Omega,\mathbb{R})$ から $C^0(\Omega,\mathbb{R})$ への連続線形写像で，以下の形をしているものである．

$$f(x)\mapsto Lf(x)=\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i=1}^{d}b_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}+c(x)f(x)+d(x). \tag{13}$$

ただしここで $a_{ij}(x),b_i(x),c(x),d(x)\in C^0(\Omega,\mathbb{R})$.

$(a_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,d}$ （$\forall x\in\Omega$）が正定値行列のとき微分作用素

$$Lf(x)=0$$

を楕円型であるという．

楕円型作用素 L（(13) で定義した）に対して

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)-Lf(x,t)=0$$

($f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は適当な微分可能性を満たすとする)の形の微分方程式を放物型といい，楕円型作用素 L に対して

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) - Lf(x,t) = 0 \quad (f \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$$

の形の微分方程式を双曲型という．

これらのタイプの 2 階微分方程式は数学，物理で興味を持たれている主要な対象である．楕円型方程式は平衡状態を記述し，放物型，双曲型微分方程式はそれぞれ拡散過程と振動過程を記述している．ラプラス作用素においては

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij} \left(= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \right) \quad (\forall\, x).$$

すなわち，この場合行列 $(a_{ij}(x))$ は単位行列であり，したがって正定値である．

B　ベクトル値関数

以前と同様 Ω を $\mathbb{R}^d$ の開集合とする．写像

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

を考え，$f = (f^1, \ldots, f^m)$ と書く．

f が $x \in \Omega$ で微分可能なとき，微分 $Df(x)$ は線形写像 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ であり，実際 $Df(x)$ は行列

$$\left(\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^i} \right)_{i=1,\ldots,d,\, j=1,\ldots,m}$$

で与えられる．(前章の始めに挙げた例 5 や前章の(10)と比較せよ．) この行列を f のヤコビ(Jacobi)行列という．特に $d = m$ のとき f の x でのヤコビアンもしくは関数行列式を

$$\det \left(\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^i} \right),$$

すなわちヤコビ行列の行列式で定義する．

Ω' を $\mathbb{R}^m$ の開集合とし，$g : \Omega' \to \mathbb{R}^l$ が $f(x) \in \Omega'$ で微分可能であれば，連鎖律より

$$D(g \circ f)(x) = (Dg)(f(x)) \circ Df(x),$$

もしくは行列の成分を使って表すと

$$\frac{\partial(g\circ f)^k(x)}{\partial x^j}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g^k(f(x))}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^i}\quad (k=1,\dots,l,i=1,\dots,d).$$

特に $d=m=l$ の場合は

$$\det\left(\frac{\partial(g\circ f)^k(x)}{\partial x^i}\right)=\det\left(\frac{\partial g^k(f(x))}{\partial y^j}\right)\det\left(\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^i}\right).$$

定義 9.17 関数 $f:\Omega\to\mathbb{R}^d$ $(m=d)$ は，$x\in\Omega\subset\mathbb{R}^d$ に対して，$\mathbb{R}^d$ のベクトル $f(x)$ を対応させると考えているときには，多くの場合ベクトル場とも呼ばれる．

f が偏微分可能なとき f の発散を

$$\operatorname{div} f(x):=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f^i(x)}{\partial x^i}$$

で定義する．

定理 9.18 $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ が偏微分可能なとき，

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\varphi f^i)=\varphi\frac{\partial f^i}{\partial x^i}+\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}f^i.$$

i についての和をとれば

$$\operatorname{div}(\varphi f)=\varphi\operatorname{div} f+\langle\operatorname{grad}\varphi,f\rangle.$$

$\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ が2回偏微分可能なとき，$\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\right)$ は偏微分可能なベクトル場で

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^i)^2}=\Delta\varphi$$

となる．

定義 9.19 $d=3$ 次元のときは特に偏微分可能ベクトル場 $f:\Omega\to\mathbb{R}^3$ に対して，ベクトル場 $\operatorname{rot} f$ （f の回転）を

$$\operatorname{rot} f:=\left(\frac{\partial f^3}{\partial x^2}-\frac{\partial f^2}{\partial x^3},\frac{\partial f^1}{\partial x^3}-\frac{\partial f^3}{\partial x^1},\frac{\partial f^2}{\partial x^1}-\frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right)$$

で定義する．

系 9.20 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ が 2 回微分可能であれば

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0.$$

証明 計算により確かめられる．例えば rot grad φ の第一項は系 8.15 より

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right) - \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right) = 0$$

となる． □

$f : \Omega \to \mathbb{R}^3 (\Omega \subset \mathbb{R}^3)$ を 2 回微分可能ベクトル場とすると，

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} f = 0.$$

証明はこの場合も単純な計算．

9 章の演習

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(\xi,\eta) := \begin{cases} \frac{\xi\eta}{r}\sin(\frac{1}{r}) & (\xi,\eta) \neq (0,0) \\ 0 & (\xi,\eta) = (0,0) \end{cases}$$

で定義する．ただしここで $r(\xi,\eta) := (\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}$.

偏微分 $\frac{\partial f}{\partial\xi}, \frac{\partial f}{\partial\eta}$ が存在する点を求めよ．どの $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ に対して写像 $\xi \mapsto \frac{\partial f}{\partial\xi}(\xi,b), \xi \mapsto \frac{\partial f}{\partial\eta}(\xi,b), \eta \mapsto \frac{\partial f}{\partial\eta}(a,\eta)$ は連続か？ f は $(0,0)$ で微分可能でないが，9 章で証明された事柄と適合しているか？

2) 以下の $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の極大，極小値を求めよ．

a) $f(\xi,\eta) := (4\xi^2+\eta^2)e^{-\xi^2-4\eta^2}$.

b) $f(\xi,\eta) := \xi^2 - \eta^2 + 1$.

c) $f(\xi,\eta) := \xi^3 + \eta^3 - \xi - \eta$.

3) $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$ は $0\in\mathbb{R}^2$ では極小値をとらないことを示せ．しかし f を，0 を通るいかなる直線に制限しても，制限された関数は 0 で極小値をとることを示せ．

4) $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ を開集合，$f:\Omega\to\mathbb{R}$ を連続微分可能とする．f の勾配は等位面 $N_f(c):=\{x\in\Omega: f(x)=c\}$ $(c\in\mathbb{R})$ に以下の意味で直交することを示せ．

$\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^d(\varepsilon>0)$ を $-\varepsilon<t<\varepsilon$ で連続微分可能で，$\gamma(0)=x_0\in\Omega, \gamma(t)\subset N_f(c)$ とすると

$$\langle\gamma'(0),\ \mathrm{grad}\ f(x_0)\rangle=0.$$

5) $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ は連続関数で連続偏微分可能とする．f が次数 α の斉次式（つまり $f(tx)=t^\alpha f(x)$ がすべての $x\in\mathbb{R}^d, t>0$ で成立）となるのは，オイラー（Euler）の公式

$$\sum_{i=1}^d x^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)=\alpha f(x)$$

がすべての $x\in\mathbb{R}^d$ で成り立つとき，またそのときに限ることを示せ．

6) $\nabla\log\log r$，$\Delta\log\log r$ を計算せよ．ただし $r=\left(\Sigma(x^i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\neq 0$　$(x=(x^1,\ldots,x^d)\in\mathbb{R}^d)$．

7) $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ を開集合，$0\notin\Omega$, $f\in C^2(\Omega)$ を $\Delta f=0$ の Ω における解とする．$g(x):=f\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right)$ が $\Omega^*:=\{x:\frac{x}{\|x\|^2}\in\Omega\}$ における $\Delta g=0$ の解であることを示せ．同様に，$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ において，$g(x)=\frac{1}{\|x\|}\ f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ が $\Delta g=0$ の解を与える．

8) $\mathbb{R}^2$ のすべての次数 ≤ 3 の調和多項式を求めよ．

9) $\Omega:=\{(\xi,\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^3:\xi^2+\eta^2<1\}$ とし，$u\in C^3(\Omega)$ を調和関数，つ

まり Ω 上 $\Delta u = 0$ とする．u が ζ 軸について回転対称とし(この条件を式で表せ)，さらに

$$f(\zeta) := u(0,0,\zeta) \qquad (\zeta \in \mathbb{R})$$

が与えられているとする．Ω 上 u を f によって ξ，η に関するテイラー展開を用いて計算したい．ここでは ζ はパラメーターと考えている．そこで

$$u(\xi,\eta,\zeta) = a_0(\zeta)+a_1(\zeta)\xi+a_2(\zeta)\eta+a_{11}(\zeta)\xi^2+2a_{12}(\zeta)\xi\eta+a_{22}(\zeta)\eta^2$$

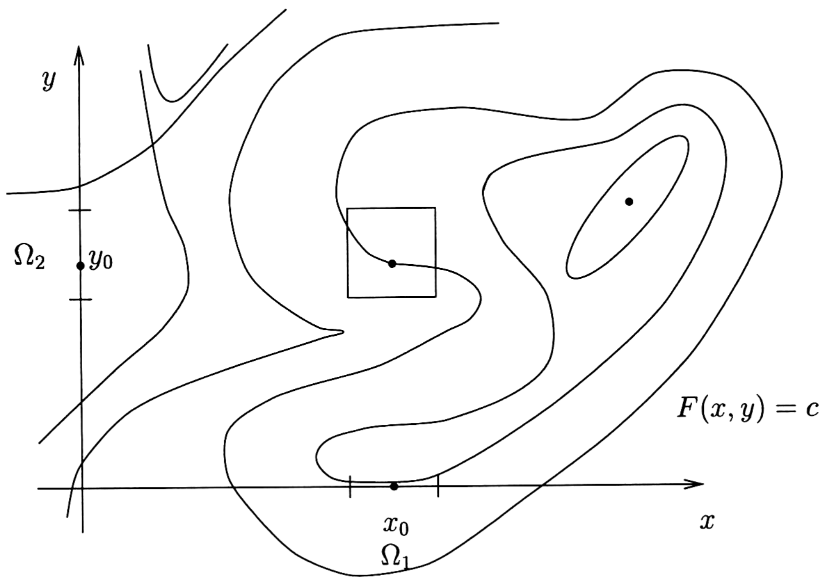
$+$ 高階項とおく．

方程式 $\Delta u = 0$ を用いて関数 $a_0(\zeta),\ldots,a_{22}(\zeta)$ を f の言葉で表せ．

第 10 章

陰関数定理とその応用

［ バナッハの不動点定理を使って陰関数定理を導く．その系として逆関数定理や条件付き極値問題に使われるラグランジュの未定係数法を学ぶ. ］



まず，問題の設定をする．関数 $F(x,y)$ が等位線で与えられているとする．前章ですでに，そのような関数の例のいくつかを見た．現実的な応用としては地図などで，$F(x,y)$ として海面からの高さを考えたり，天気図で気圧を表す関数として $F(x,y)$ を考えたりする．この場合には，等位線はいわゆる等

圧線である．以下の問題を考えよう．$c \in \mathbb{R}$ と $F(x_0, y_0) = c$ となる (x_0, y_0) を与えられたとき，

$$F(x, g(x)) = c \tag{1}$$

となるような関数 $x \mapsto y = g(x)$ を，少なくとも局所的に，つまり (x_0, y_0) の近傍で，見つけることができるか？

ここで，g はできる限り連続で，F が微分可能なときは，微分可能であって欲しい．また，g の定義された近傍では $g(x)$ が(1)の唯一つの解であって欲しい．つまり，等位線は局所的には x の関数であり，しかも x 軸上のグラフとして与えられるようにしたい．

すぐわかることは，これはいつでも可能なわけではない．まず第一に等位線は非退化でなくてはならない，つまり一点になったりしてはいけない．また，角があったり，自己交叉があってもいけない．等位線の接線が垂直になっていれば，x の関数として表すことは，少なくとも微分可能な関数としてはできないし，折り返し点となっていれば関数として表すことは決してできない．また，問題を小さな近傍に制限して考えるということも大切である．x_0 のあまり大きな近傍をとってしまうと，一般に解は存在しないし，y_0 の大きな近傍をとってしまうと，一般には解は唯一つではない．以上の制限を付けて考えると，上の問題は解けてしまう．実際，以下の重要な結果を得る．

定理 10.1（陰関数定理） V_1, V_2, W をバナッハ空間とし，$\Omega \subset V_1 \times V_2$ を開集合，$(x_0, y_0) \in \Omega$，$F : \Omega \to W$ を Ω 上連続微分可能とする．

$$F(x_0, y_0) = 0$$

と仮定する(一般性を失わずに $c = 0$ とできる)．(連続)線形写像

$$D_2F(x_0, y_0) : V_2 \to W$$

が可逆で，逆も連続とする．このとき x_0 の開近傍 Ω_1，y_0 の開近傍 Ω_2 で $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \Omega$ となるものと，微分可能関数 $g : \Omega_1 \to \Omega_2$ が存在して，

$$F(x, g(x)) = 0 \tag{2}$$

となり，また任意の $x \in \Omega_1$ に対し

$$Dg(x) = -(D_2F(x, g(x)))^{-1} \circ D_1F(x, g(x)) \tag{3}$$

が成り立つ．

さらに，任意の $x \in \Omega_1$ に対して $g(x)$ は Ω_2 における (2) の唯一つの解である．

証明 記述を簡単にするため，$L_0 := D_2F(x_0, y_0)$ とおく．方程式 $F(x, y) = 0$ は

$$y = y - L_0^{-1}F(x, y) =: G(x, y)$$

と同等である．したがって問題を，任意の x に対して，写像 $y \mapsto G(x, y)$ の不動点を見つけるという問題に置き換えることができる．このように考えることの利点はバナッハの不動点定理を使えることにある．バナッハの不動点定理を思い出しておこう．

補題 10.2 A をバナッハ空間 B の閉部分集合，$T : A \to A$ を，ある固定した $q < 1$ に対して

$$\|Ty_1 - Ty_2\| \le q\|y_1 - y_2\| \quad (y_1, y_2 \in A) \tag{4}$$

を満たすものとする．

このとき，

$$Ty = y \tag{5}$$

となる点 $y \in A$ が唯一つ存在する．さらに，写像の族 $T(x)$ ですべての $T(x)$ が x によらない (x はバナッハ空間 B_0 のある開集合を動く) 同じ q に対して (4) を満たすとき，

$$T(x)y = y \tag{6}$$

の解 $y = y(x)$ は x に関して連続である．

x に関して連続であることはきちんと示してないので，もう一度ここで証明を与える．

証明 各 $x \in \Omega$ に対して帰納的に

$$y_n := T(x)y_{n-1} \tag{7}$$

と定義する．ただし，ここで $y_0 \in A$ は勝手に選んでおく．

$$y_n = \sum_{\nu=1}^{n}(y_\nu - y_{\nu-1}) + y_0 = \sum_{\nu=1}^{n}(T(x)^{\nu-1}y_1 - T(x)^{\nu-1}y_0) + y_0 \tag{8}$$

である．

$$\sum_{\nu=1}^{n}\|T(x)^{\nu-1}y_1 - T(x)^{\nu-1}y_0\| \le \sum_{\nu=1}^{n} q^{\nu-1}\|y_1 - y_0\| \le \frac{1}{1-q}\|y_1 - y_0\|.$$

よって列 (8) は絶対一様収束し，極限として得られる関数 $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n$ は連続である．

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} T(x)y_{n-1} = T(x)(\lim_{n\to\infty} y_{n-1}) = T(x)y(x)$$

であり，A は閉なので $y(x) \in A$, 結果として $y(x)$ は (6) の解となる．解が唯一つであることは (4) より従う．実際，y_1, y_2 が $y = Ty$ の解とすると

$$\|y_1 - y_2\| = \|Ty_1 - Ty_2\| \le q\|y_1 - y_2\|$$

であり $q < 1$ なので，$y_1 = y_2$ を得る． □

これで補題 10.2 の証明が完結したので，次に定理の証明に移る．まず，$(L_0^{-1} \circ L_0 = \mathrm{Id})$ なので

$$G(x, y_1) - G(x, y_2) = L_0^{-1}(D_2F(x_0, y_0)(y_1 - y_2) - (F(x, y_1) - F(x, y_2)))$$

と書ける．F は (x_0, y_0) で微分可能で L_0^{-1} は連続なので，$\delta_1 > 0, \eta > 0$ が存在して $\|x - x_0\| \le \delta_1, \|y_1 - y_0\| \le \eta, \|y_2 - y_0\| \le \eta$（よって $\|y_1 - y_2\| \le 2\eta$）に対して

$$\|G(x, y_1) - G(x, y_2)\| \le \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\| \tag{9}$$

が成立する（$\frac{1}{2}$ のかわりに，任意の $q < 1$ に対して同様の式を得る）．

さらに，ある $\delta_2 > 0$ が存在して $\|x - x_0\| \le \delta_2$ に対して

$$\|G(x, y_0) - G(x_0, y_0)\| < \frac{\eta}{2}. \tag{10}$$

したがって $\|y - y_0\| \le \eta$, $G(x_0, y_0) = y_0$ を用いて，$\|x - x_0\| \le \delta :=$

$\min(\delta_1, \delta_2)$ となる x に対して(9), (10)より

$$\begin{aligned}\|G(x,y)-y_0\| &= \|G(x,y)-G(x_0,y_0)\| \\ &\le \|G(x,y)-G(x,y_0)\| + \|G(x,y_0)-G(x_0,y_0)\| \\ &\le \frac{1}{2}\|y-y_0\| + \frac{\eta}{2} \\ &\le \eta\end{aligned}$$

を得る．したがって $G(x,y)$ は閉球体 $B(y_0,\eta)$ を自分自身に写す．（また同様に開球体 $U(y_0,\eta)$ を自分自身に写す.） よって補題 10.2 を関数 $y \mapsto G(x,y)$ に適用できる．$\|x-x_0\| \le \delta$ を満たす各 x に対して，$\|y-y_0\| \le \eta$ となる唯一つの $y = y(x)$ が存在し $y = G(x,y)$ を満たす．よって $F(x,y) = 0$ で，さらに y は x に関して連続である．$\Omega_1 := \{x : \|x-x_0\| < \delta\}$, $\Omega_2 := \{y : \|y-y_0\| < \eta\}$ とおき，なんの制限をも付けることなしに $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \Omega$ とできる．この y を $g(x)$ と表す．あとは g の微分可能性を示せば良い．$(x_1,y_1) \in \Omega_1 \times \Omega_2, y_1 = g(x_1)$ とする．F は (x_1,y_1) で微分可能で，$K = D_1F(x_1,y_1)$，$L = D_2F(x_1,y_1)$ とおき，また $(x,y) \in \Omega$ に対して

$$F(x,y) = K(x-x_1) + L(y-y_1) + \varphi(x,y) \tag{11}$$

とおくと

$$\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} \frac{\varphi(x,y)}{\|(x-x_1, y-y_1)\|} = 0 \tag{12}$$

となる．

F は連続微分可能なので，δ と η を十分小さくとれば L が補題 7.21 の条件を満たすようにできるので，連続な逆 L^{-1} を持つ．

$F(x,g(x)) = 0$ が $x \in \Omega_1$ で成り立つので

$$g(x) = -L^{-1}K(x-x_1) + y_1 - L^{-1}\varphi(x,g(x)) \tag{13}$$

を得る．(12)より，ある $\rho_1, \rho_2 > 0$ が存在して

$$\|x-x_1\| \le \rho_1, \|y-y_1\| \le \rho_2 :$$
$$\|\varphi(x,y)\| \le \frac{1}{2\|L^{-1}\|}(\|x-x_1\| + \|y-y_1\|)$$

なので

$$\|\varphi(x,g(x))\| \le \frac{1}{2\|L^{-1}\|}(\|x-x_1\| + \|g(x)-g(x_1)\|) \tag{14}$$

が成立する．(13)，(14) より

$$\|g(x)-g(x_1)\| \le \|L^{-1}K\|\,\|x-x_1\| + \frac{1}{2}\|x-x_1\| + \frac{1}{2}\|g(x)-g(x_1)\|$$

が成立し

$$\|g(x)-g(x_1)\| \le c\|x-x_1\| \ (c := 2\|L^{-1}K\|+1). \tag{15}$$

$\psi(x) := -L^{-1}\varphi(x, g(x))$ とおくことで，(13) より

$$g(x)-g(x_1) = -L^{-1}K(x-x_1)+\psi(x) \tag{16}$$

となり，$\|\psi(x)\| \le \|L^{-1}\|\,\|\varphi(x,g(x))\|$. $\lim_{x\to x_1}\frac{\varphi(x,g(x))}{\|x-x_1\|}=0$ を用いると，(12), (15) より

$$\lim_{x\to x_1}\frac{\psi(x)}{\|x-x_1\|}=0. \tag{17}$$

(16)，(17) は $g(x)$ が x_1 で微分可能で

$$Dg(x_1) = -L^{-1}K = -(D_2F(x_1,y_1))^{-1}D_1F(x_1,y_1)$$

となることを意味する．これは (3) と同値である．　□

陰関数定理よりの直接の帰結は次のとおり．

定理 10.3 (逆関数定理) V, W をバナッハ空間, Ω を V の開集合, $f:\Omega\to W$ を連続微分可能とする．$y_0\in\Omega$ で $Df(y_0)$ が可逆で，逆 $(Df(y_0))^{-1}$ もまた連続とする．y_0 の開近傍 $\Omega'\subset\Omega$ が存在し，関数 f は Ω' から $x_0=f(y_0)$ のある開近傍 Ω'' への全単射となる．逆関数 $g=f^{-1}:\Omega''\to\Omega'$ は微分可能で,

$$Dg(x_0) = (Df(y_0))^{-1}. \tag{18}$$

証明　$F(x,y)=f(y)-x$ を考える．仮定より $D_2F(x_0,y_0)=Df(y_0)$ は可逆で，連続な逆を持つ．陰関数定理より，x_0 のある開近傍 Ω'' と，微分可能関数 $g:\Omega''\to V$ が存在し，$g(\Omega'')\subset\Omega_2$ が y_0 のある近傍 Ω_2 で成立する．$F(x,g(x))=0$ なので $f(g(x))=x$ が $x\in\Omega''$ で成立し，また $g(x_0)=y_0$. 以下，f を $g(\Omega'')$ に制限するが，同じ記号で表す．$f(g(x))=x$ なので，g は Ω'' 上単射であり，よって g は Ω'' から $g(\Omega'')$ への全単射になる．さらに f が連続なので $g(\Omega'')=f^{-1}(\Omega'')$ は開集合．$\Omega'=g(\Omega'')$ とおく．f は Ω' から Ω'' への全単射である．最後に (18) は (3) と関係式 $f(g(x))=x$ より従い,

連鎖律より

$$Df(g(x_0)) \circ Dg(x_0) = \mathrm{Id}.$$

□

ここで，有限次元の場合の具体的な結果を示す．

系 10.4 Ω を $\mathbb{R}^d$ の開集合，$x_0 \in \Omega, \varphi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ は連続微分可能で，$\varphi(x_0) = y_0$ とする．

（i）$d \leq k$ で，$D\varphi(x_0)$ の階数が最大 $(= d)$ のとき，y_0 の開近傍 Ω'，x_0 の開近傍 Ω''，微分可能関数

$$g : \Omega' \to \mathbb{R}^k$$

が存在し，任意の $x \in \Omega''$ に対し

$$g \circ \varphi(x) = i(x).$$

ただし $i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, d \leq k$ は標準的な単射 $i(x^1, \ldots, x^d) = (x^1, \ldots, x^d, 0, \ldots, 0)$ である．

（ii）$d \geq k$ で，$D\varphi(x_0)$ が最大階数 $(= k)$ のとき，x_0 のある開近傍 $\tilde{\Omega}$ と，微分可能写像

$$h : \tilde{\Omega} \to \Omega$$

が存在し $h(x_0) = x_0$ で $\varphi \circ h(x) = \pi(x)$．ただしここで $\pi :\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ $(d \geq k)$ は標準的射影 $\pi(x^1, \ldots, x^d) = (x^1, \ldots, x^k)$ である．

証明 (i) 仮定より，x_0 で階数 $(D_j\varphi^i)_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,d}} = d$．必要なら番号を付け替えて x_0 で $\det(D_j\varphi^i)_{i,j=1,\ldots,d} \neq 0$ としてよい．

$f : \Omega \times \mathbb{R}^{k-d} \to \mathbb{R}^k$ を

$$f(x^1, \ldots, x^k) = \varphi(x^1, \ldots, x^d) + (0, \ldots, 0, x^{d+1}, \ldots, x^k)$$

で定義する．$\{x_0\} \times \{0\}$ で

$$\det(D_jf^i)_{i,j=1,\ldots,k} = \det(D_j\varphi^i)_{i,j=1,\ldots,d} \neq 0$$

を得る．

陰関数定理より f の微分可能な逆 g が存在し

$$i(x) = g \circ f(i(x)) = g \circ \varphi(x).$$

(ii) 前と同様に，一般性を失わずに x_0 で $\det(D_j\varphi^i)_{i,j=1,\dots,k} \neq 0$ と仮定してよい．

$f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ を

$$f(x^1, \dots, x^d) = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^k(x), x^{k+1}, \dots, x^d)$$

で定義する．x_0 で

$$\det(D_j f^i)_{i,j=1,\dots,d} = \det(D_j\varphi^i)_{i,j=1,\dots,k} \neq 0$$

を得る．

よって逆関数定理より，f の逆関数 h が存在して

$$\pi(x) = \pi \circ f \circ h(x) = \varphi \circ h(x).$$

□

(i) の場合，φ は局所的には包含写像

$$\begin{array}{ccc} \Omega'' \subset \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\varphi} & \Omega' \subset \mathbb{R}^k \\ i \searrow & & \swarrow g \\ & \mathbb{R}^k & \end{array}$$

となり，(ii) の場合は，射影

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d & \\ h \swarrow & & \searrow \pi \\ h(\tilde{\Omega}) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d & \underset{\varphi}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^k \end{array}$$

になる．それぞれの場合に $i = g \circ \varphi$，$\pi = \varphi \circ h$ なので，図式は矢印の向きにたどれる．このような図式を可換図式という

例　例として，おなじみの $\mathbb{R}^2$ の極座標を考える．$f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を

$$f(r,\varphi)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

で与える．

$$Df(r,\varphi)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial r} & \frac{\partial f^1}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial f^2}{\partial r} & \frac{\partial f^2}{\partial \varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}$$

なので，$r>0$ と任意の φ で $\det(Df)=r>0$ となる．

逆に $Df(r,\varphi)$ は $r>0$ で可逆で，逆関数定理より f は局所的に可逆で，逆関数を g で表すと，$(x,y)=f(r,\varphi)$ において

$$Dg(x,y)=(Df(r,\varphi))^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \frac{-\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r}\end{pmatrix}$$

$\frac{x}{r}=\cos\varphi, \frac{y}{r}=\sin\varphi$ なので，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\varphi=\arctan\frac{y}{x}$ と，より具体的に求めることができる．特に

$$Dg(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}.$$

この例からわかるように，逆は一般に，局所的にのみ存在する．実際

$$f(r,\varphi+2\pi m)=f(r,\varphi)\ (\forall\ m\in\mathbb{Z}).$$

x,y を $\mathbb{R}^2$ のユークリッド座標とすると，$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ となる r, φ を (x,y) の極座標という．$(x,y)=(0,0)$ のとき座標 φ を定めることはできない．しかし，この場合 f は可逆ではない．複素表示は

$$x+iy=re^{i\varphi}$$

で与えられる．

次に条件付き極値問題に対するラグランジュ(Lagrange)の未定係数法を導く．このために Ω を $\mathbb{R}^d$ $(m<d)$ の開集合とし，$F:\Omega\to\mathbb{R}^m$ が与えられているとする．$F(x)=0$ の条件の下で関数 $h:\Omega\to\mathbb{R}$ の極値を見つけたい．別の言い方をすれば h の集合 $\{x:F(x)=0\}$ への制限を考え，この集合上

の極小値または極大値を求めたい．これらの極値は集合 $\{F(x) = 0\}$ に属する他の点とのみ比較した極値である．

定理 10.5 $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ を連続微分可能，($\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $m < d$) とし，$F(x) = 0$ の条件の下で h が x_0 で極小値をとるとする．

$DF(x_0)$ が最大階数 m をとる，つまり

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1(x_0)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1(x_0)}{\partial x^d} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F^m(x_0)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^m(x_0)}{\partial x^d} \end{pmatrix}$$

の m 次小行列式でゼロにならないものがあると仮定する．このとき，m 個の実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$（ラグランジュの未定係数）が存在して，方程式

$$Dh(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j DF^j(x_0) \tag{19}$$

を満たす．特に $m = 1$ の場合は実数 λ が存在して

$$\operatorname{grad} h(x_0) = \lambda \operatorname{grad} F(x_0)$$

となる．

証明　必要なら座標 $x^1, \ldots, x^d$ の番号を付け替えて

$$\det \left(\frac{\partial F^i(x_0)}{\partial x^j} \right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=d-m+1,\ldots,d}} \neq 0 \tag{20}$$

とできるので，$DF(x_0)$ の最後の m 行の小行列式がゼロにならないとしてよい．$z = (x^1, \ldots, x^{d-m})$, $y = (x^{d-m+1}, \ldots, x^d)$ とおき，同様に z_0, y_0 を定める．不等式(20)は $D_2F(z_0, y_0)$ ($x = (z, y) \in \mathbb{R}^{d-m} \times \mathbb{R}^m$) が可逆であることを意味している．陰関数定理より (z_0, y_0) の近傍で，条件 $F(z, y) = 0$ は $y = g(z)$ の形に書ける．つまり $F(z, g(z)) = 0$. 関数 $H(z) := h(z, g(z))$ は（条件なしの）極値を x_0 でとる．よって定理 9.9 より

$$DH(z_0) = 0 \iff \frac{\partial H}{\partial z^i}(z_0) = 0 \ \ (i = 1, \ldots, d - m),$$

$$\frac{\partial h(z_0, g(z_0))}{\partial z^i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial h(z_0, g(z_0))}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial g^j(z_0)}{\partial z^i} = 0$$

が $i = 1, \ldots, d-m,$ で成り立つ．別の書き方をすると

$$D_1 h(z_0, g(z_0)) + D_2 h(z_0, g(z_0)) Dg(z_0) = 0.$$

一方，陰関数定理より

$$Dg(z_0) = -(D_2 F(z_0, g(z_0)))^{-1} D_1 F(z_0, g(z_0)).$$

これらすべてを併せると

$$D_1 h - D_2 h (D_2 F)^{-1} D_1 F = 0$$

が $(z_0, g(z_0))$ で常に成立する．

$$\Lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) := D_2 h (D_2 F)^{-1} (z_0, g(z_0))$$

とおく．これより

$$D_1 h = \Lambda D_1 F \tag{21}$$

であり，Λ の定義より

$$D_2 h = \Lambda D_2 F \tag{22}$$

が $(z_0, g(z_0))$ で成立する．方程式(21)，(22)は(19)と同等である． □

例　例として，$F(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1$ と定めるとき $F(x) = 0$ の条件のもとに $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $h(x) = x^1 + x^2 + x^3$ の極値を求める．極値で $\operatorname{grad} h(x_0) = \lambda \operatorname{grad} F(x_0)$ でなくてはいけない．よって

$$1 = 2\lambda x_0^i \ (i = 1, 2, 3) \tag{23}$$

と，$F(x_0) = 0$，つまり

$$(x_0^1)^2 + (x_0^2)^2 + (x_0^3)^2 = 1 \tag{24}$$

が考えるべき条件である．これらは x_0 の 3 成分と λ，つまり 4 つの未知数に関する 4 つの方程式である．方程式(23)より $x_0^1 = x_0^2 = x_0^3$ で，(24)より

$$x_0 = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \tag{25}$$

一方，h はコンパクト集合 $\{F(x)=0\}$ 上最大値，最小値をとり，これらは(25)によって決まる．(25)の正の符号は最大値，負の符号は最小値に対応する．

10章の演習

1) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z):=z^2$ について考察する．f を $\mathbb{R}^2$ から自分自身への写像と考えたとき，微分可能となる点を求めよ．ヤコビ行列式(ヤコビアン)が0とならない点は？ 開集合の像は開集合か？ $\mathbb{C}$ の領域で，f が全単射で f も f^{-1} も連続微分可能となるような，最も大きな領域を決定せよ．実軸または虚軸と平行な軸，0を始点とする半直線，0を中心とする円などの f による像を求めよ．

2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を

$$\begin{aligned}
&f^1(\xi,\eta):=\xi\\
&f^2(\xi,\eta):=\eta-\xi^2 && \xi^2\le\eta\\
&f^2(\xi,\eta):=\frac{\eta^2-\xi^2\eta}{\xi^2} && 0\le\eta\le\xi^2,(\xi,\eta)\ne(0,0)\\
&f^2(\xi,\eta):=-f^2(\xi,-\eta) && \eta\le 0
\end{aligned}$$

で定める．f はすべての点で微分可能で，$Df(0,0)=\mathrm{Id}$ であるが，Df は $(0,0)$ で連続でないことを確かめよ．$(0,0)$ の各近傍は $f(x_1)=f(x_2)$ となる $x_1\ne x_2$ を含む．これは逆関数定理と矛盾するか？

3) $B:=\{x\in\mathbb{R}^d:\|x\|<1\}, A:=\{x\in\mathbb{R}^d,\|x\|>1\}$ とおく．$f:B\backslash\{0\}\to A$ を $f(x)=\frac{x}{\|x\|^2}$ で定義する．Df を計算せよ．f は全単射か？ $d=2$ または3のとき，$f(x)$ を幾何的に構成せよ．

4) (空間の極座標) $\mathbb{R}^d_+:=\{(r,t^2,\ldots,t^d)\in\mathbb{R}^d:r\ge 0\}$ $(d\ge 3)$ とおく．写像 $F_d:\mathbb{R}^d_+\to\mathbb{R}^d$ を以下の方程式で与える．

$$x^1 := r\prod_{i=2}^{d}\cos t^i,\ x^j := r\sin t^j \prod_{i=j+1}^{d}\cos t^i \quad (j=2,\ldots,d-1)$$

$$x^d := r\sin t^d.$$

F_d は全射であることを示せ．ヤコビアンを計算せよ．ヤコビアンが $\neq 0$ となる点を決定せよ．F_d による以下の集合の像はどのようなものになるか？

$$Q_R := \{(r,t^2,\ldots,t^d) : 0 \le r \le R, -\pi < t^2 \le \pi, -\frac{\pi}{2} \le t^j \le \frac{\pi}{2},\ j=3,\ldots,d\}$$

$$H_R := \{(r,t^2,\ldots,t^d) : r = R, -\pi < t^2 \le \pi, -\frac{\pi}{2} \le t^j \le \frac{\pi}{2},\ j=3,\ldots,d\}.$$

$x \in \mathbb{R}^d$ が $x = F_d(r,t^2,\ldots,t^d), (r,t^2,\ldots,t^d) \in \mathbb{R}^d_+$ となるとき，x の極座標という．r は x より唯一つに決まる(公式を与えよ)．$x \neq 0$ のとき $t^2,\ldots,t^d$ を唯一つに決めるような規約を求めよ．$d=3$ のとき t^2, t^3 を角度として解釈できることを絵を描いて示せ．

第 11 章

$\mathbb{R}^d$ の曲線．常微分方程式系

［まず，ユークリッド空間の曲線に関する初等的な性質，求長可能性や弧長変数を扱う．次に曲線を表す常微分方程式系を考える．高階の常微分方程式をこのような常微分方程式系に帰着する．］

定義 11.1 $\mathbb{R}^d$ の曲線とは，連続写像 $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ のことである．ここで I は一点以上を含む $\mathbb{R}$ の区間である．区間 I は有界でも非有界でも構わない．

例 1）直線 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d, \gamma(t) = x_0 + vt \ (v \neq 0)$.

2）半径 $r > 0$ の円 $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$.

3）螺旋 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, \alpha t) \ (r > 0, \alpha \neq 0)$.

4）アルキメデスの螺旋 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\alpha t\cos t, \alpha t\sin t)$, $\alpha > 0$.

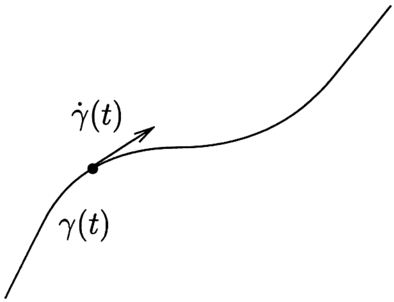
5）対数螺旋 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\alpha e^{\lambda t}\cos t, \alpha e^{\lambda t}\sin t)$, $\alpha > 0, \lambda > 0$.

6）連続関数 $f : I \to \mathbb{R} : \gamma : I \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, f(t))$ のグラフ．

定義 11.2 $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ を微分可能な曲線．$t \in I$ に対して

$$\dot{\gamma}(t) := D\gamma(t)$$

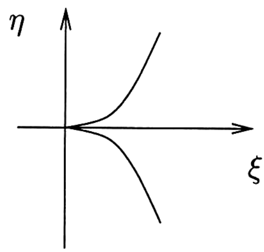
を t における γ の接ベクトルという．$\dot{\gamma}(t)$ は割線（傾きを表すベクトル）の極限 $\dot{\gamma}(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}$ である．



$\mathbb{R}^n$ の曲線とは，運動学的には時刻 t に $\gamma(t)$ にいる質点の軌跡であり，$\dot{\gamma}(t)$ は時刻 t での速度ベクトルであると解釈できる．

連続微分可能曲線の像は角を持つこともある，例としてネイルの放物線を挙げる．

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t^2, t^3), \text{ したがって } \gamma(\mathbb{R}) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \eta = \pm\xi^{\frac{3}{2}}\}.$$



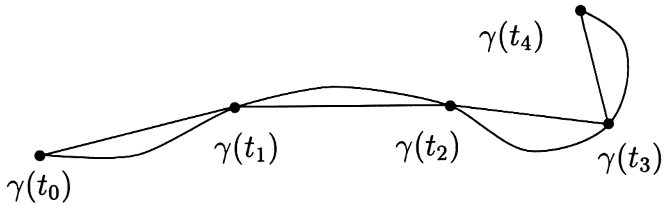
これを確かめるために以下を定義をする．

定義 11.3 $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ を連続微分曲線とする．すべての $t \in I$ で $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ のとき正則曲線といい，ある $t \in I$ で $\dot{\gamma}(t) = 0$ となるとき特異であるという．

曲線の長さを定義する．$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ を曲線とし，$t_0 = a < t_1 < \cdots < t_k = b \, (k \in \mathbb{N})$ を $[a, b]$ の分割 Z という．

$$L(\gamma, Z) = \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|,$$

とおくと $L(\gamma, Z)$ は点 $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_k)$ を結ぶ折れ線の長さである．



定義 11.4 曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ は

$$L(\gamma) := \sup_{Z} L(\gamma, Z) < \infty$$

のとき求長可能(長さを持つ)曲線という．このとき $L(\gamma)$ を γ の長さという．$\alpha, \beta \in [a,b]$ に対して，γ を $[\alpha,\beta]$ に制限したものを $\gamma_{|[\alpha,\beta]}$ と書く．つまり $t \in [\alpha,\beta]$ に対して $\gamma_{|[\alpha,\beta]}(t) = \gamma(t)$ となる曲線 $\gamma_{|[\alpha,\beta]} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^d$ である．

補題 11.5 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ を曲線，$c \in (a,b)$ とする．曲線 γ が求長可能なのは $\gamma_{|[a,c]}$，$\gamma_{|[c,b]}$ が求長可能なとき，またそのときに限る．また，このとき

$$L(\gamma) = L(\gamma_{|[a,c]}) + L(\gamma_{|[c,b]})$$

が成立する．

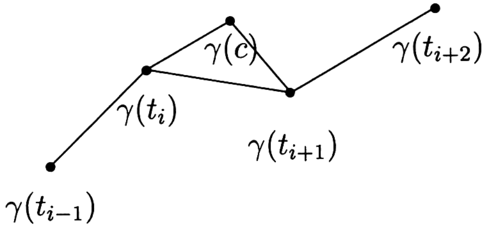
証明 Z を $[a,b]$ の分割で，ある番号 i で $t_i < c < t_{i+1}$ となっているとする．このとき $t_0, t_1, \ldots, t_i, c, t_{i+1,\ldots} t_k$ もまた $[a,b]$ の分割 Z' を与え，

$$L(\gamma, Z) \le L(\gamma, Z')$$

となる．さらに

$$\gamma_1 = \gamma_{|[a,c]}, \gamma_2 = \gamma_{|[c,b]}$$

とおく．



$t_0, \ldots, t_i, c,$ は $[a, c]$ の分割 Z_1' を，$c, t_{i+1,\ldots} t_k$ は $[c, b]$ の分割 Z_2' を定義する．よって

$$L(\gamma, Z) \leq L(\gamma, Z') = L(\gamma_1, Z_1') + L(\gamma_2, Z_2') \leq L(\gamma) \qquad (1)$$

を得る．逆に，$[a, c]$，$[c, b]$ それぞれの任意の分割 Z_1, Z_2 に対して，$Z = Z_1 \cup Z_2$ は $[a, b]$ の分割を与えるので

$$L(\gamma_1, Z_1) + L(\gamma_2, Z_2) = L(\gamma, Z) \leq L(\gamma) \qquad (2)$$

となる．(1)，(2) より主張が従う．□

定義 11.6 求長可能曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ に対して，その弧長関数 $s : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ を

$$s(t) := L(\gamma_{|[a,t]})$$

で定義する．

補題 11.5 より，このように定義することが可能であり，また $s(t)$ が単調増加であることがわかる．

定理 11.7 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ を連続微分可能曲線とする．γ は求長可能で

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau.$$

またすべての $t \in [a, b]$ で $\dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$.

証明　まず，$[a, b]$ の分割 Z が $t_0, \ldots, t_k$ で与えられているとすると，

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(\tau) d\tau \| \quad (i = 1, \ldots, k) \qquad (3)$$

を得る．ここで

$$\int_\alpha^\beta \dot{\gamma}(\tau) d\tau := (\int_\alpha^\beta \dot{\gamma}^1(\tau) d\tau, \ldots, \int_\alpha^\beta \dot{\gamma}^d(\tau) d\tau)$$

とおいた．さらに，任意の連続関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ と $\alpha, \beta \in [a, b]$ に対して

$$\| \int_\alpha^\beta f(\tau) d\tau \| \leq \int_\alpha^\beta \|f(\tau)\| d\tau \qquad (4)$$

を得る．これは f を(ベクトル値)階段関数で一様近似することにより確かめられる．$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, s_n = (s_n^1, \ldots, s_n^d)$,（三角不等式により）

$$\|\sum_{\lambda=1}^{l} s(\tau_\lambda)(\tau_\lambda - \tau_{\lambda-1})\| \leq \sum_{\lambda=1}^{l} \|s(\tau_\lambda)\|(\tau_\lambda - \tau_{\lambda-1}) \tag{5}$$

を使う．ここで τ_λ はちょうど s が不連続となる点である．$s = s_\nu$ に対して(5)の両辺は，それぞれ(4)の対応する辺に収束する．(4)を使うと，(3)より

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot\gamma(\tau)\| d\tau$$

を確かめることができ，これにより

$$L(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot\gamma(\tau)\| d\tau. \tag{6}$$

特に γ は求長可能である．$t, t+h \in [a,b]$ に対して，($h > 0$ と仮定すると) 補題 11.5 と(6)を $\gamma_{|[t,t+h]}$ に用いることで，

$$\begin{aligned}\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| &\leq L(\gamma_{|[t,t+h]}) = s(t+h) - s(t) \\ &\leq \int_t^{t+h} \|\dot\gamma(\tau)\| d\tau\end{aligned}$$

を得る．

$$\|\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\| \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|\dot\gamma(\tau)\| d\tau.$$

$h \to 0$ で 左辺と右辺は $\|\dot\gamma(t)\|$ に収束し，$\dot s(t) = \|\dot\gamma(t)\|$ を得，これより

$$L(\gamma) = s(b) = \int_a^b \dot s(\tau) d\tau = \int_a^b \|\dot\gamma(\tau)\| d\tau\,.$$

□

定義 11.8 曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ は，点 $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_k = b$ が存在して $i = 1, \ldots, k$, $\gamma_{|[t_{i-1},t_i]}$ が連続微分可能なとき，区分的連続微分可能であるという．

補題 11.5 と定理 11.7 より

系 11.9 区分的連続微分可能な曲線は求長可能で，その長さは連続微分可能

な区分の長さの和となる．

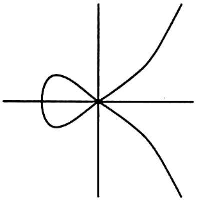
定義 11.10 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ を曲線，$[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ とする．全単射連続写像 $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ を変数変換という．φ が狭義単調増加のとき，向きを保つ変数変換といい狭義単調減少のとき向きを逆にする変数変換という．(φ は全単射なので，このどちらか一方が必ず起こる.) 二つの曲線 γ_1，γ_2 は向きを保つ変数変換が存在して $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ となるとき同値であるといい，変数変換 φ が向きを保つことを要請しないときには弱同値という．

明らかに，同値，弱同値はそれぞれ「同値関係」である．実際，推移律は，二つの変数変換の合成がまた変数変換であることからわかる．(弱) 同値な曲線は像は同じだが，進行の仕方が違う．

定義 11.11 弧とは弱同値な曲線の族のことであり，向き付きの弧とは同値な曲線の族のことである．

曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ は必ずしも単射である必要はない．例えば二重点を持っても構わない．

例　$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を曲線 $\gamma(t) = (t^2-1, t^3-t)$ とする．$\gamma(1) = \gamma(-1) = (0,0)$．したがって γ は二重点を持ち，



二つの接ベクトル $\gamma'(-1) = (-2,2)$，$\gamma'(1) = (2,2)$ は異なる方向を向いている．

定義 11.12 弧が単射な曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ によって表されているときジョルダン弧であるという．$[a,b)$ 上単射な曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ で $\gamma(a) = \gamma(b)$ となる (つまり始点と終点が一致している) で表されているとき閉ジョルダン

弧という.

明らかに，単射な曲線に弱同値な曲線は再び単射である．したがってジョルダン弧であるという性質は同値類がどの曲線で表されているかには係わりない性質である.

補題 11.13 $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^d$ と $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^d$ が弱同値な曲線とする．一方が求長可能であれば他方も求長可能で，長さは一致する.

証明 $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ で，$\varphi : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ は全単射で連続であるとする．φ は $[a_2, b_2]$ の分割と $[a_1, b_1]$ の分割の間の全単射を導く．つまり，$a_2 = t_0 < t_1 < \cdots t_k = b_2$ を $[a_2, b_2]$ の分割 Z_2 とすると，φ が単調増加のときは $\varphi(t_0), \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_k)$ は $[a_1, b_1]$ の分割 Z_1 を与え，φ が単調減少なときは $\varphi(t_k), \ldots, \varphi(t_0)$ が $[a_1, b_1]$ の分割 Z_1 を与える．同様に φ^{-1} は $[a_1, b_1]$ の分割を $[a_2, b_2]$ の分割に写す．さらに $i = 1, \ldots, k$ で $\gamma_2(t_i) = \gamma_1(\varphi(t_i))$ であれば $L(\gamma_2, Z_2) = L(\gamma_1, Z_1)$ となる．これより $L(\gamma_j), j = 1, 2$ の定義からただちに主張が従う. □

補題 11.13 より以下の定義が意味をなす.

定義 11.14 弧が求長可能曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ によって表されているとき求長可能な弧であるといい，その長さを $L(\gamma)$ で定義する.

定理 11.15 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ を連続微分可能で，すべての $t \in [a, b]$ で $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ となるとき，長さ関数 $s(t) := L(\gamma_{|[a,t]})$ は可逆であり，逆 $t(s)$ も同様に微分可能である．曲線 $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s)), \tilde{\gamma} : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^d$ は γ と同値で,

$$\| \dot{\tilde{\gamma}}(s) \| = 1 \ (\forall s, 0 \leq s \leq L(\gamma)) \tag{7}$$

を満たす.

証明の前に言葉を用意する.

定義 11.16 曲線 $\tilde{\gamma}(s)$ で $s = L(\tilde{\gamma}_{|[0,s]})$ となっているとき，曲線は弧長でパラメーター付けされているといい，s を弧長変数という.

定理 11.15 は，連続微分可能な(区分的に連続微分可能な)曲線は常に，弧長でパラメーター付けできることを主張している．この主張は，求長可能可能曲線でも成立する．その証明は，難しくはないが込み入っているのでここでは割愛する．$s(t) := L(\gamma_{|[a,t]})$ が連続であることを示すのが主な点である．興味のある読者は各自試みよ．

定理 11.15 の証明　定理 11.7 と仮定より

$$\dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0 \ (\forall\, t),\ \ L(\gamma) = \int_a^b \dot{s}(\tau)d\tau. \tag{8}$$

$t \mapsto s(t)$ が狭義増加な $[a,b]$ から $[0, L(\gamma)]$ への全単射であることがわかり，逆 $t(s)$ は微分可能で $\dot{t}(s) = \frac{1}{\dot{s}(t)}$. $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$ に対して $\dot{\tilde{\gamma}}(s) = \dot{\gamma}(t(s)) \cdot \frac{1}{\dot{s}(t)}$ を得，よって $\|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\| = 1$ が(8)より成立する．□

次に二つの正則曲線の交わる角度を定義する．

定義 11.17　$\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^d, \gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^d$ を正則曲線で $t_1 \in I_1, t_2 \in I_2$ で $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ となるとする．向き付けられた曲線 γ_1，γ_2 の $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ でなす角度を，対応する接ベクトルのなす角度で定義する．すなわち

$$\theta := \arccos \frac{\langle \dot{\gamma}_1(t_1), \dot{\gamma}_2(t_2) \rangle}{\|\dot{\gamma}_1(t_1)\| \cdot \|\dot{\gamma}_2(t_2)\|}\,.$$

二つの正則曲線の角度は，曲線のパラメーターを同時に向きを保つ変数変換をするか，もしくは同時に向きを逆にする変数変換をほどこしても変わらない．一方は向きを保つ変数変換をし，他方は向きを逆にする変数変換すると，曲線のなす角度は $\pi - \theta$ に変わる．

最後に，直感的にはもっともらしいが，驚くほど証明をするのが難しいジョルダン弧の定理を証明なしで紹介する．

ジョルダン弧の定理　$\mathbb{R}^2$ 内の閉ジョルダン弧 Γ は $\mathbb{R}^2$ を二つの開連結集合に分割する．つまり $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2, \partial\Omega_1 = \Gamma = \partial\Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \Omega_1, \Omega_2$ は開であり，連結である．もちろんこれらの二つの集合のうち，一方だけが有界である．

次に区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された曲線 $f : I \to \mathbb{R}^d$ で常微分方程式の解曲線となるものを調べよう．このために，J を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とし，

$$\phi : I \times J \to \mathbb{R}^d$$

を連続関数とする．曲線 f は $f(x) \in J$ $(x \in I)$，$\xi_1, \xi_2 \in I$ に対して

$$f^i(\xi_2) - f^i(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \phi^i(\xi, f(\xi)) d\xi (\, i = 1, \dots, d)$$

となるとき，常微分方程式系

$$f'(x) = \phi(x, f(x)) \tag{9}$$

の解曲線という．ただし，ここで $f(\xi) = (f^1(\xi), \dots, f^d(\xi))$.

(9) の解を与えられた初期条件 $f(x_0) = y_0$ の下に求めるには，ϕ がリプシッツ条件を満たす場合には定理 6.16 の証明を逐語的にたどればよい．

定理 11.18 $\phi(x, y)$ が $|x - x_0| \le \rho$, $|y - y_0| \le \eta$ で連続で，

$$|\phi(x, y)| \le M \tag{10}$$

を満たすとする．さらに ϕ はリプシッツ条件，つまりある $L < \infty$ が存在して，$|x - x_0| \le \rho$, $|y_1 - y_0| \le \eta$, $|y_2 - y_0| \le \eta$ に対して

$$|\phi(x, y_1) - \phi(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

を満たすとする．このとき，$h > 0$ が存在して，(9) が $[x_0 - h, x_0 + h] \cap I$ で唯一つの解 $f(x_0) = y_0$ を持つ．

このような常微分方程式系は高階の常微分方程式を扱うと自然に現れる．例えば

$$u : I \to \mathbb{R}$$

に対する 2 階常微分方程式

$$u''(x) = \psi(x, u(x), u'(x)) \tag{11}$$

を考える．ここで $u \in C^2(I)$ は 2 階微分 $u''(x)$ が $\psi(x, u(x), u'(x))$ と任意の

$x \in I$ で一致するとき(11)の解であるという．もちろんこれは，6 章で見た 1 階常微分方程式の場合と同様，同値な積分方程式で表すことができる．(11) を $x_0 \in I$ での初期条件

$$u(x_0) = u_0 \qquad (12)$$
$$u'(x_0) = v_0$$

を満たすように解きたい．

(11)式を二つの 1 階常微分方程式よりなる微分方程式系に書き直す．

$$v(x) := u'(x) \qquad (13)$$

とおくと，(11)は

$$u'(x) = v(x) \qquad (14)$$
$$v'(x) = \psi(x, u(x), v(x))$$

と同値になる．$f(x) := (u(x), v(x)), \phi(x, f(x)) := (v(x), \psi(x, u(x), v(x)))$ とおくと，(14)は

$$f'(x) = \phi(x, f(x)) \qquad (15)$$

と同値である．同様に $y_0 := (u_0, v_0)$ とおくと，初期条件(12)は

$$f(x_0) = y_0 \qquad (16)$$

と表せる．よって

系 11.19 初期条件(12)を満たす 2 階微分方程式(11)は，ψ が有界でリプシッツ条件

$$|\psi(x, u_1, v_1) - \psi(x, u_2, v_2)| \le L(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)$$

を $|x - x_0| \le \rho, |u_i - u_0| + |v_i - v_0| \le \eta \ (i = 1, 2)$ に対して満たすとき区間 $[x_0 - h, x_0 + h] \cap I$ で唯一つの解 u を持つ．

同様に，高階の常微分方程式は 1 階の常微分方程式系に書き直すことができる．

11 章の演習

1) この章の最初に挙げた例 1〜5 の曲線の弧長関数を求めよ.

2) 常微分方程式

$$f'' = f$$

の解 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を決定せよ.

第IV部

ルベーグ積分

第 12 章

準備. 半連続関数

[ルベーグ(Lebesgue)積分論の準備のために下半連続，上半連続関数を学ぶ.]

定理 12.1 (Dini) K を距離関数 d を持つ距離空間のコンパクト部分集合とし，$f_n : K \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ を連続関数で

$$f_n \leq f_{n+1} \ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

を満たすものとする．さらに，$x \in K$ に対して

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

が存在し，$f : K \to \mathbb{R}$ もまた連続であるとする．このとき $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は K 上 f に一様収束する．

証明 $\varepsilon > 0$ とする．任意の $x \in K$ に対して $N(x) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|f(x) - f_{N(x)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

$f_{N(x)}$，f はいずれも連続なので，$\delta(x) > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} &|(f(y) - f_{N(x)}(y)) - (f(x) - f_{N(x)}(x))| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &(d(x,y) < \delta(x) \text{ となる } \forall y \in K \text{ で}). \end{aligned} \tag{3}$$

(1), (2), (3) より $n \geq N(x), d(x,y) < \delta(x)$ に対して

$$|f(y) - f_n(y)| \leq |f(y) - f_{N(x)}(y)| < \varepsilon.$$

$x \in K$ に対して

$$U_x := U(x, \delta(x)) = \{y : d(x,y) < \delta(x)\}$$

とおく. K はコンパクトで (U_x) によって被覆されているので, そのうちの有限個で覆われる. それらを $U_{x_1},\ldots,U_{x_k}$ とおく.

$$|f(y)-f_n(y)|<\varepsilon\ (\forall y\in K\ ,\ n\geq\max(N(x_1),\ldots,N(x_k))).$$

これより一様収束性が従う. □

簡単でよく知られた例によって, この定理は f が連続と仮定しない場合には成立しないことがわかる. 単調増加する連続関数の極限ですら連続とは限らない. 連続関数を含み, また単調増加列の極限に関して閉じている関数のクラスを導入しよう.

定義 12.2 X を距離空間, $x\in X$ とする. 関数 $f:X\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ は $c<f(x)$ となる任意の $c\in\mathbb{R}$ に対して x の近傍 U が存在して, 任意の $y\in U$ で, $c<f(y)$ となるとき, x で下半連続であるという. $X=\mathbb{R}$ の場合は以下のように表現することもできる.

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ |x-y|<\delta \text{となる} \forall\,y:f(x)-f(y)<\varepsilon.$$

関数 f は, すべての $x\in X$ で下半連続なとき, X で下半連続という.

同様に $f:X\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ が x で上半連続であるとは, $-f$ が x で下半連続であることと定義する. もしくは同値な定義であるが, $c>f(x)$ となる $\forall c\in\mathbb{R}$ に対して x の近傍 U が存在して $\forall y\in U:c>f(y)$ となるとき上半連続であるという.

$f:X\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ が下半連続であれば, すべての $c\in\mathbb{R}$ で, 集合 $f^{-1}((c,\infty])$ が, この集合に含まれる任意の点の近傍になっている.

補題 12.3 $f:X\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ が下半連続なのは, 任意の $c\in\mathbb{R}$ に対して $f^{-1}((c,\infty])=\{x\in X:c<f(x)\}$ が (X の) 開部分集合であるとき, またそのときに限る.

例　1) $f:X\to\mathbb{R}$ が連続であるのは, 下半連続でありかつ上半連続であるとき, またそのときに限る.

2) 特性関数.

$A \subset X$ とする．A の特性関数を

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in X \backslash A \end{cases}$$

で定義する．補題 12.3 より A が開集合なのは，χ_A が下半連続であるときまたそのときに限る．A が閉集合なのは χ_A が上半連続なときである．

3) f が x_0 で極小値を持つ，すなわち x_0 の近傍の各点 x で $f(x) \geq f(x_0)$ であれば，f は x_0 で下半連続．

下半連続性の点列収束を使った判定条件が存在する．

補題 12.4 $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が $x \in X$ で下半連続であるのは，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となる任意の列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ で

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$$

となるとき，またそのときに限る．

証明 f は $x = \lim x_n$ で下半連続で $c < f(x)$ とする．このとき x の近傍 U が存在して，任意の $y \in U$ で

$$c < f(y)$$

である．一方，$x_n \to x$ なので，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ となるすべての n で $x_n \in U$．したがって $c < f(x)$ となる任意の c に対して $n \geq N$ で $f(x_n) > c$ となるので

$$\liminf f(x_n) \geq f(x).$$

逆に補題の列収束条件を満たしているとし，また $c < f(x)$ とする．すべての $y \in U$ で $c < f(y)$ となるような x の近傍 U が存在しないと仮定する．特に任意の $n \in \mathbb{N}$ で

$$d(x, x_n) < \frac{1}{n}, \qquad f(x_n) \leq c$$

となる．すると $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ で，かつ $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq c < f(x)$ となり

仮定に矛盾する. □

補題 12.5 $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を下半連続とすると $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$, $f + g$ もまた下半連続である.

証明は簡単な練習問題. □

補題 12.6 コンパクト集合 K 上の下半連続関数は最小値を K 上でとる.

証明 $\mu := \inf_{y \in K} f(y)$ とおく. $f(x_n) \to \mu$ となる列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ をとると, K はコンパクトなので, 部分列に取り替えることで (x_n) はある $x \in K$ に収束する. 補題 12.4 より

$$f(x) \leq \liminf f(x_n) = \mu.$$

一方 μ の定義より $f(x) \geq \mu$ なので $f(x) = \mu$. よって f は最小値を x でとる. □

注意 コンパクト集合上の下半連続関数は必ずしも最大値をとるとは限らない. 例えば, $[0, 1]$ 上の f を

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

で定義すると, これは最大値をとらない. 下半連続関数の値は下方にジャンプする可能性があるが, 上方にジャンプすることはない.

定義 12.7 $f_\alpha : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \alpha \in I$ を関数の族とする. この族の上包関数

$$f := \sup_{\alpha \in I} f_\alpha$$

を

$$f(x) := \sup_{\alpha \in I} f_\alpha(x)$$

で定義する. 同様に下包関数 $\inf f_\alpha$ を族 $f_\alpha : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \alpha \in I$ に対して定義する.

補題 12.8 $f_\alpha : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を関数の族で, すべての $f_\alpha, \alpha \in I$ が $x_0 \in X$

で下半連続とする．このとき上包関数もまた $x_0 \in X$ で下半連続．

証明 $c < f(x_0)$ とする．$f(x_0) = \sup_{\alpha\in I} f_\alpha(x_0)$ なので，$\beta \in I$ が存在して $c < f_\beta(x_0)$．f_β は下半連続なので x_0 のある近傍 U が存在して，U の点 y で $c < f_\beta(y)$．$f \geq f_\beta$ なので $y \in U$ で $c < f(y)$．したがって f は x_0 で下半連続． □

特に，連続関数の族の上包関数もまた下半連続である．しかし，連続関数の族の上包関数は必ずしも連続とは限らない．例えば

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \begin{cases} nx & 0 \leq x < \frac{1}{n}\ (n \in \mathbb{N}) \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

に対して

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1\,. \end{cases}$$

定義 12.9 X を距離空間，$f : X \to \mathbb{R}$ とする．$\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ の閉包を f の台 $\operatorname{supp} f$ という．コンパクトな台を持つ連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ 全体のなす空間を $C_c(X)$ と表す．

定理 12.10 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に対して以下の 条件(i)と条件(ii)は同値である．

(i) a) f は下半連続．

b)コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ が存在して，$x \in \mathbb{R}^d \backslash K$ で $f(x) \geq 0$.

(ii) 関数 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ の単調増加列(単調増加とはすべての $n \in \mathbb{N}$ で $f_n \leq f_{n+1}$ の意味)が存在して，$f = \lim_{n\to\infty} f_n$（各点収束の意味で，つまり各 $x \in \mathbb{R}^d$ で $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$)．

証明 "(ii) ⇒ (i)"：(f_n) が単調増加列なので $\lim f_n = \sup f_n$．さらにすべての f_n は連続なので補題 12.8 より $f = \sup f_n$ は下半連続．さらに $f \geq f_1$ なので $x \in \mathbb{R}^d \backslash \operatorname{supp}(f_1)$ に対して $f(x) \geq 0$．$K := \operatorname{supp}(f_1)$ はコンパクトなので(b)の条件を満たす．

"(i) ⇒ (ii)"：まず，コンパクトな台を持つ連続関数 $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ の列で

$$f = \sup_{m\in\mathbb{N}} g_m; \tag{4}$$

となるものを見つければ良いことを見る．実際，$f_n := \sup(g_1, \ldots, g_n)$ は $C_c(\mathbb{R}^d)$ の単調増加列で $f = \lim f_n$ となる．このような $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ を構成する．

コンパクト集合上の下半連続関数は下に有界(補題12.6より)なので，ある有理数 $m \geq 0$ が存在して

$$f(x) > -m \qquad (\, x \in \mathbb{R}^d).$$

$$Q := \{(q, r, s) : q, r, s \text{ 有理数} \, s \geq -m, \\ |x - q| < r \text{ となるすべての } x \text{ で } f(x) \geq s\}$$

とおく．集合 Q は可算集合で，すべての $j = (q, r, s) \in Q$ に対して関数 $g_j \in C_c(\mathbb{R}^d)$ で以下の性質を満たすものが存在する．

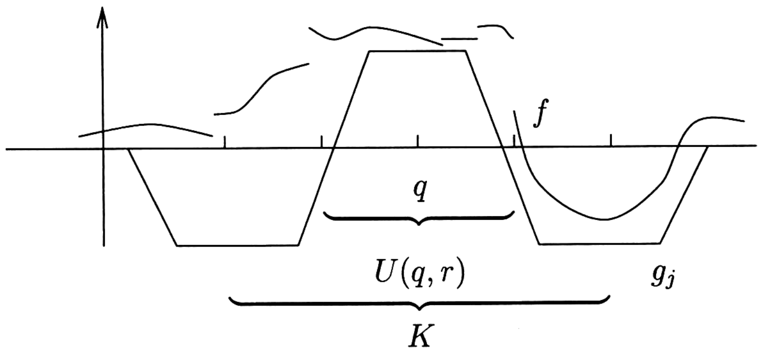
1) $x \in U(q, \frac{r}{2})$ で $g_j(x) = s$.

2) $x \in U(q, r)$ で $g_j(x) \leq s$.

3) $x \in K \backslash U(q, r)$ で $g_j(x) = -m$.

4) $x \in \mathbb{R}^d \backslash (K \cup U(q, r))$ で $g_j(x) \leq 0$.

構成の仕方より，すべての $j \in Q$ で $f \geq g_j$ であり，また以下に見るように $f = \sup_{j\in Q} g_j$ である．



$x \in \mathbb{R}^d, c < f(x)$ とする．有理数 s で $s \geq -m$, $c \leq s < f(x)$ となるものをとる．f は下半連続なので，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - y| < \delta \text{となるすべての} y \text{で} f(y) > s.$$

$0 < r \leq \frac{\delta}{2}$ となる有理数 r と $|x - q| < \frac{r}{2}$ となる有理数 q をとると，$j = (q, r, s) \in Q$ であり，また $c \leq g_j(x) < f(x)$．すべての $c < f(x)$ に対して，このような g_j を構成したので $f = \sup_{j \in Q} g_j$．Q は可算集合なので条件を満たす関数の族が構成できる． □

まったく同様にコンパクト集合の外で非正な上半連続な関数を以下のように特徴づけられる．

定理 12.11 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ で以下の条件 (i) と (ii) は同値．

（i） a） f は上半連続．

b） コンパクトな $K \subset \mathbb{R}^d$ の外で $f(x) \leq 0$.

（ii） コンパクトな台を持つ連続関数の単調減少列 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で $f = \lim f_n$ となるものが存在する．

定義 12.12 $H_I(\mathbb{R}^d)$ を定理 12.10 の条件を満たす関数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ の集合，$H_S(\mathbb{R}^d)$ を定理 12.11 の条件を満たす関数の集合とする．

系 12.13 $H_I(\mathbb{R}^d) \cap H_S(\mathbb{R}^d) = C_c(\mathbb{R}^d)$.

コンパクトな台を持つ連続な関数の単調増加列の極限であり，また同時にコンパクトな台を持つ連続関数の単調減少列の極限であるような関数は連続である.

証明　定理 12.10 と定理 12.11 よりの帰結. □

12章の演習

1) $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, ($X$ は距離空間) は下半連続とする.

   a) $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$, $f + g$ も下半連続.

   b) $f, g \geq 0$ であれば $f \cdot g$ も下半連続.

   c) $f = 0$ となる点で $\frac{1}{f}$ が定義できたとすると半連続性について何がわかるか？

2) 下半連続関数の一様極限はまた下半連続であることを示せ.

3) $g : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $g(x^1, x^2) = |x^1 x^2 - 1|$ で定義し，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x^1) := \inf_{x^2 > 0} g(x^1, x^2)$ で定義する．f は下半連続でない.

4) $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を距離空間 X 上の関数とする．f の正則化 $f_{(-)}, f_{(s)}$ を

$$f_{(-)}(x) := \sup\{g(x) : g \leq f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad \text{下半連続}\}$$
$$f_{(s)}(x) := \sup\{g(x) : g \leq f, g : X \to \mathbb{R} \quad \text{連続}\}$$

で定義する

   a) $f_{(-)}$，$f_{(s)}$ は下半連続であることを示せ.

   b) $f_{(-)}$，$f_{(s)}$ が連続でない例を作れ.

c) $f_{(-)} = f_{(s)}$ は常に成立するか？

d) $f_{(-)}, f_{(s)}$ と

$$\underline{f}(x) := \liminf_{y \to x} f(y) := \inf\{\liminf_{n \to \infty} f(y_n) : y_n \to x\}$$

で定義される $\underline{f}$ の関係は？

第13章

半連続関数のルベーグ積分，コンパクト集合の体積

［ 半連続関数の積分を定義し，フビニ(Fubini)の定理など，積分の性質を調べる．コンパクト集合の体積を定義し，カバリエリ(Cavalieri)の原理など体積を計算するための公式を導く．特に回転対称な場合には計算が簡単になることを見る． ］

この章，そして後続の章における目的は $\mathbb{R}^d$ 上の実数値関数のクラスで，道理にかなった方法で積分を定義できる，なるべく大きなクラスを構成することである．対応

$$f \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$$

は線形で，単調 ($f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$) であり，さらに $\mathbb{R}^d$ の合同変換で不変 (A を直交行列，$b \in \mathbb{R}^d$ とするとき，これから定義しようとしている関数のクラスに属している f では $\int_{\mathbb{R}^d} f(Ax+b)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$ が成立) となって欲しい．さらに，積分は一般的な極限操作と交換可能でなくてはいけない．

構成は段階を踏んで行う．まずコンパクトな台を持つ連続な関数に対して積分を定義し，次に H_I または H_S に属する半連続な関数に対して，最後に一般の関数の関数に対して積分を定義する．収束定理は16章で証明する．

定義 13.1 $\mathbb{R}^d$ の単位立方体とは

$$I^d := \{(x^1, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x^i \leq 1 \ (i = 1, \ldots, d)\},$$

もしくは，より一般に $A(I^d) + b$ のことである．ただし，ここで $b \in \mathbb{R}^d$，A は $d \times d$ 直交行列である．

辺の長さが $\ell > 0$ の立方体を定義するには，条件を $i = 1, \ldots, d$ で $0 \leq x^i \leq \ell$ とすれば良い．

定義 13.2 $W \subset \mathbb{R}^d$ を立方体とする．関数 $t : W \to \mathbb{R}$ が階段関数であることを以下で定義する．W の小立方体 $W_1, \ldots, W_k$ への分割で $W = \cup_{i=1}^k W_i$, $\mathring{W}_i \cap \mathring{W}_j = \emptyset \ (i \neq j)$ となるものがあって t は各 $\mathring{W}_i, i = 1, \ldots, k$ 上定数値.

$t_{|\mathring{W}_i} = c_i$ とし，W_i の辺の長さを ℓ_i とする．階段関数 t の積分を

$$\int_W t(x)dx = \sum_{i=1}^k c_i \ell_i^d \tag{1}$$

で定義する．右辺は明らかに t がその上で定数となる小立方体への W の分割の仕方によらない．

$f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ とする．$\mathrm{supp}\, f \subset W$ と立方体 W 上の階段関数 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の列で f に一様収束するものをとる．(このような列が存在することは明らか．ℓ を W の一辺の長さとし，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して辺の長さ $\frac{\ell}{n}$ の n^d 個の立方体 $W_1, \ldots, W_{n^d}$ への W の分割をとる．各 $i = 1, \ldots, n^d$ に対して $x_i \in W_i$ を決め $t_n(x) = f(x_i)$ $(x \in W_i)$ とする．関数 f はコンパクトな立方体 W 上一様連続なので t_n は f に一様収束する.)

定義 13.3 f の積分を

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_W t_n(x)dx$$

で定義する．

極限の存在は簡単にわかる．$\varepsilon > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\sup_{x\in W} |f(x) - t_n(x)| < \varepsilon \quad (\forall n \geq N),$$

$$\sup_{x\in W} |t_n(x) - t_m(x)| < 2\varepsilon \quad (\forall n, m \geq N).$$

したがって特に $n, m \geq N$ で

$$\left| \int_W t_n(x)dx - \int_W t_m(x)dx \right| < 2\varepsilon \cdot \ell^d \ (\ell \text{ は } W \text{ の一辺の長さ})$$

ゆえに積分 $\int_W t_n(x)dx$ の列は $\mathbb{R}$ のコーシー列．同様の議論で $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$

が f に一様収束する列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の選び方にも $\operatorname{supp} f$ を含む W のとり方にもよらないことが示せる.

この定義は $d=1$ のとき連続関数に対して前に定義した積分と一致する. しかし大切なのは, 以前に定義した積分は不定積分であったのに対し, ここで定義したものは定積分である.

補題 13.4 $f, g \in C_c(\mathbb{R}^d), \alpha \in \mathbb{R}$ とする.

(i)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} (f(x)+g(x))dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x)dx,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)dx \quad \text{(線形性)}.$$

(ii) $f \leq g$ のとき $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx$.

(iii) $b \in \mathbb{R}^d$, A は $d\times d$ 直交行列とすると,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(Ax+b)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

証明 (i) は対応する階段関数の積分に関する公式よりただちにでる. (iii) は階段関数で成立する. なぜなら直交行列 A と階段関数 t に対して A が立方体を立方体に写すので $t\circ A$ もまた階段関数である. ベクトル b による平行移動に関しても同様. さらに $f\leq g$ であれば f, g を階段関数の列 (t_n), (s_n) でそれぞれ近似するとき $t_n \leq s_n$ とできるので (ii) も成立する. □

さらに

補題 13.5 $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ は一辺の長さ ℓ の立方体に $\operatorname{supp}(f)$ が含まれるものとする. このとき

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)dx| \leq \sup |f(x)| \cdot \ell^d. \tag{2}$$

証明は階段関数の対応する性質から導ける．

補題13.4，13.5は対応

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$$

が線形で，各バナッハ空間 $C_c(W)$ (W は $\mathbb{R}^d$ の立方体)上有界(したがって連続)実数値汎関数であり，また合同変換で不変であることを意味している．逆に，この性質を持ち

$$\int_{I^d} 1dx = 1$$

と正規化された汎関数は唯一つに定まることが示せる．

次に H_I，H_S に属する半連続関数の積分を考える．

定義 13.6 $f \in H_I$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx := \sup\{\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx : g \in C_c(\mathbb{R}^d), g \le f\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

と定義し，$f \in H_S$ であれば $-f \in H_I$ なので，$f \in H_S$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx := -\int_{\mathbb{R}^d} -f(x)dx$$

と定義する．

補題 13.7 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_I$ を単調増加列とする．$f := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in H_I$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx. \qquad (3)$$

証明　まず f とすべての f_n が $C_c(\mathbb{R}^d)$ に属している場合を考える．単調性を仮定しているので，各 n で

$$\mathrm{supp} f_n \subset \mathrm{supp} f_1 \cup \mathrm{supp} f =: K.$$

ディニの定理(定理12.1)より (f_n) は f に一様収束し，(2)より

$$|\int_{\mathbb{R}^d} (f_n(x) - f(x))dx| \le C \sup |f_n(x) - f(x)| \quad (C \text{ は定数}).$$

これがゼロに収束することが一様収束性よりわかる．

次に一般の場合を扱う，定義よりすべての n で

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

示すべきことは，逆に任意の $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ で $g \leq f$ であれば

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx \tag{4}$$

が成立することである．

定理 12.10 より，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して単調増加列 $(\varphi_{nm})_{m\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ で

$$f_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \varphi_{nm}$$

となるものが存在する．

$$h_n := \sup_{p\leq n, q\leq n} \varphi_{pq}$$

$$g_n := \inf(g, h_n)$$

とおく．列 (h_n)，(g_n) は $C_c(\mathbb{R}^d)$ の単調増加列で

$$f = \sup_{n\in\mathbb{N}} h_n,$$

$$g = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \quad (g \leq f \text{ なので}).$$

g は $C_c(\mathbb{R}^d)$ に属し，この場合に関してはすでに扱ったので

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)dx \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} h_n(x)dx \quad (g_n \leq h_n) \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx \quad (h_n \leq f_n).\end{aligned}$$

したがって(4)が示せる．ここで証明に積分の単調性(補題 13.4)を何度も使った． □

補題 13.8 補題 13.4 の主張が $f, g \in H_I(\mathbb{R}^d), \alpha \geq 0$ に対して成立する．

証明は定義と補題 13.4 よりただちに従う．

最後に補題 13.8，13.7 より

補題 13.9 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_I$ を非負関数列 とすると

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx.$$

次に $\mathbb{R}^d$ の積分を累次 d 重積分に帰着させる．

定理 13.10（フビニ(Fubini)の定理） $f \in H_I(\mathbb{R}^d)$, $i_1 \dots i_d$ を $(1, \dots, d)$ の並べ替えとする．$(x^{i_{c+1}}, \dots, x^{i_d}) \in \mathbb{R}^{d-c}$　$1 \leq c < d$ に対して

$$F(x^{i_{c+1}}, \dots, x^{i_d}) := \int_{\mathbb{R}^c} f(\xi, x^{i_{c+1}}, \dots, x^{i_d})d\xi \ (\ \xi = (x^{i_1}, \dots, x^{i_c}))$$

とおく．

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^{d-c}} F(\eta)d\eta \ (\ \eta = (x^{i_{c+1}}, \dots, x^{i_d})).$$

(特にここに現れるすべての関数は H_I に属している.)

定理 13.10 の主張を

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^{d-c}} (\int_{\mathbb{R}^c} f(\xi, \eta)d\xi)d\eta$$

の形で覚えるのが良い．これを繰り返し使うことで

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x^1, \dots, x^d)dx^1 \dots dx^d.$$

ここで 括弧を省略できるのは，定理 13.10 より積分の順序は交換可能だからである．

定理 13.10 の証明 まず $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ の場合を考える．座標軸に平行な立方体 W で $\mathrm{supp} f \subset W$ となるものをとり，f を W 上の階段関数 t_n によって一様近似する．各 t_n は

$$t_{n,i} = \begin{cases} c_i & W_i \text{ 上} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で定義される $t_{n,i}$ の和である．立方体 W_i の辺の長さを ℓ_i とする．明らかに

$$\int_{\mathbb{R}^d} t_{n,i}(x)dx = c_i\ell_i^d = c_i\ell_i^{d-c}\ell_i^c$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{d-c}} (\int_{\mathbb{R}^c} t_{n,i}(\xi,\eta)d\xi)d\eta\,.$$

したがって主張は $t_{n,i}$ に対して成立し，よって $t_n = \sum t_{n,i}$ でも成立する．

$\sup_x |t_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ であれば

$$\sup_\eta |\int_{\mathbb{R}^c} (t_n(\xi,\eta) - f(\xi,\eta))d\xi| < \ell^c \cdot \varepsilon \ (\ell \text{は } W \text{ の一辺の長さ}).$$

これより主張は f に対しても成立することがわかる．なぜなら $f(\xi,\eta)$ に対して $F(\eta) = \int_{\mathbb{R}^c} f(\xi,\eta)d\xi$ は連続である．実際，

$$|F(\eta_1) - F(\eta_2)| \le \ell^c \sup_\xi |f(\xi,\eta_1) - f(\xi,\eta_2)|$$

であり，f はコンパクトな台で一様連続なので．右辺は $|\eta_1 - \eta_2|$ が十分に小さければいくらでも小さくできるからである．

次に $f \in H_I(\mathbb{R}^d)$ とし，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ を単調増加列で f に収束するものとする．$F_n(\eta) := \int_{\mathbb{R}^c} f_n(\xi,\eta)d\xi$ とすると

$$F(\eta) = \int_{\mathbb{R}^c} f(\xi,\eta)d\xi = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^c} f_n(\xi,\eta)d\xi = \lim_{n\to\infty} F_n(\eta).$$

前の考察より $F_n \in C_c(\mathbb{R}^{d-c})$ であり，定理 12.10 より $F \in H_I(\mathbb{R}^{d-c})$．さらに

$$\int_{\mathbb{R}^{d-c}} F(\eta)d\eta = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-c}} F_n(\eta)d\eta = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-c}} \int_{\mathbb{R}^c} f_n(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx \text{ （すでに示したことより）}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

ここでは補題 13.7 を二度使った．これより主張がでる．　□

系 13.11　定理 13.10 と同様の仮定で $f(\xi,\eta) = \varphi(\xi)\cdot\psi(\eta)(\varphi,\psi \in H_I)$ とする．このとき

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^c} \varphi(\xi)d\xi \cdot \int_{\mathbb{R}^{d-c}} \psi(\eta)d\eta.$$

補題 13.12　$f \in H_I(\mathbb{R}^d)$，$A \in GL(d,\mathbb{R})$，（A は $d\times d$ 行列で $\det A \neq 0$），$b \in \mathbb{R}^d$ とする．関数 $x \mapsto f(Ax+b)$ は $H_I(\mathbb{R}^d)$ に属し

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Ax+b)dx = \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

証明　最初の主張は明らか．補題 13.8 より

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Ax+b)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(Ax)dx.$$

さらに，線形代数のよく知られた結果より，A は

$$A = S_1 D S_2 \tag{5}$$

と分解できる．ただし S_1，S_2 は直交行列で D は対角行列

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$$

である．

補題 13.8 より

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(S_1DS_2x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(S_1Dx)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(S_1D(x^1,\ldots,x^d))dx^1\ldots dx^d$$

（定理 13.10 より）

$$= \frac{1}{|\lambda_1\ldots\lambda_d|}\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(S_1(y^1,\ldots,y^d))dy^1\ldots dy^d,$$

（一次元の積分 $\int_{\mathbb{R}}\varphi(\lambda x)dx = \frac{1}{|\lambda|}\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)dy$ が成立するので）

$$= \frac{1}{|\lambda_1\ldots\lambda_d|}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)dy.$$ （補題 13.8 より）

直交行列は行列式 ± 1 なので，(5) より

$$|\det A| = |\det D| = |\lambda_1\ldots\lambda_d|.$$

したがって，前の公式より主張が従う． □

補題 13.12 の分解 (5) を使わずに線形代数の初歩だけを使った証明を与えよう．

I を $(d\times d)$ 単位行列とする．$i\neq j, i,j\in\{1,\ldots,d\}, t\in\mathbb{R}$ に対して，$S_{ij}(t)$ を I の j 列目の t 倍を i 列目に加えてできる行列，R_{ij} を I の i 列目と j 列目を交換してできる行列とする．

$$\det S_{ij}(t) = 1 = |\det R_{ij}| \ (\forall i\neq j, t\in\mathbb{R}).$$

さらに R_{ij} は直交行列で立方体を同じ辺の長さの立方体に写すので

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(R_{ij}x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

また，フビニの定理 13.10 より

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(S_{ij}(t)x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x^1,x^2,\ldots x^{i-1},x^i+tx^j,x^{i+1},\ldots,x^d)dx^1\ldots dx^d. \tag{6}$$

一次元の積分の性質より

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^i + tx^j)dx^i = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^i)dx^i.$$

累次積分(6)で，まず x^i で積分してから残りの変数で積分する．フビニの定理より，このように積分の順序を変えても積分の値は変わらない．

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(S_{ij}(t)x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\,.$$

行列 A に対して $R_{ij}A$ は A の i 列目と j 列目を交換した行列であり，AR_{ij} は i 行目と j 行目を交換した行列である．したがって A に行列 R_{ij} をかけることで，非零成分を $(1,1)$ 成分に持ってくることができる．一行目に適当な数をかけて他の行に加えることで，$(1,2),\dots,(1,d)$ 成分をゼロにできる．この操作は A に $S_{ij}(t)$ をかけることで得られる．同様に $(2,1),(2,3),\dots,(2,d)$ 成分をゼロにできる．この操作を d 回繰り返すことで対角行列を得る．つまり

$$A = P_1 D P_2.$$

ただしここで P_1，P_2 は $R_{ij}, S_{ij}(t)$ の積より得られる行列で

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\det A = \det P_1 \det D \det P_2, \\
&|\det P_1| = 1 = |\det P_2|, \\
&|\lambda_1 \dots \lambda_d| = |\det D| = |\det A| \neq 0 \text{（仮定より）}.
\end{aligned}$$

最後に

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(P_1 D P_2 x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(P_1 D x)dx$$

（すでに示したことより）

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(P_1(\lambda_1 x^1, \ldots, \lambda_d x^d))dx^1 \ldots dx^d$$

$$= \frac{1}{|\lambda_1 \ldots \lambda_d|} \int_{\mathbb{R}^d} f(P_1 x)dx.$$

一次元の積分の公式(フビニの定理を再び使うと)，上の式は

$$= \frac{1}{|\lambda_1 \ldots \lambda_d|} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$$

となることが示せる．

主張は $|\lambda_1 \ldots \lambda_d| = |\det A|$ より従う． □

注意 定理 13.10，補題 13.12 など上述の主張が自然なやり方で $H_S(\mathbb{R}^d)$ に属する関数に対して成立することは重要である．以下断らずに，これらの結果を $H_S(\mathbb{R}^d)$ に属する関数に対しても用いる．

記号 以下の記号を導入しよう．A を当分のところ $\mathbb{R}^d$ のコンパクト部分集合，$f \in H_S(\mathbb{R}^d)$ とする．

$$\int_A f(x)dx := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\chi_A(x)dx\,.$$

後に同じ記号をもっと一般の集合に対しても使う．同様に，しばらくは厳密には $f \cdot \chi_A \in H_S$ と仮定する．この仮定は，例えば f が正値であればいつでも満たされる(補題 12.5 と比較せよ)．

$d = 1$ のとき，

$$\int_{[a,b]} f(x)dx \text{ と書くかわりに } \int_a^b f(x)dx$$

とも書く．A が有界な開集合の場合にも，$f \in H_I(\mathbb{R}^d)$，例えば f が非負のとき，同様の定義ができる．

$K \subset \mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とする．特性関数 χ_K は $H_S(\mathbb{R}^d)$ に属する（12 章参照）．

定義 13.13 K の体積を

$$\mathrm{Vol}\,(K) := \mathrm{Vol}\,_d(K) := \int_{\mathbb{R}^d} \chi_K(x)dx$$

で定義する．$d=1$ の場合には体積とはいわず長さといい，$d=2$ の場合には面積という．

補題 13.14 $1 \le c < d$,　$K_1 \subset \mathbb{R}^c, K_2 \subset \mathbb{R}^{d-c}$ をコンパクト集合とする．

$$\mathrm{Vol}_d(K_1 \times K_2) = \mathrm{Vol}_c(K_1) \cdot \mathrm{Vol}_{d-c}(K_2).$$

証明　$x = (x^1, \ldots, x^d), \xi = (x^1, \ldots, x^c), \eta = (x^{c+1}, \ldots, x^d)$ とおく．

$$\chi_{K_1 \times K_2}(\xi, \eta) = \chi_{K_1}(\xi) \cdot \chi_{K_2}(\eta)$$

なので，系 13.11 より補題を得る．□

この補題より，多くの初等幾何の公式を再証明できる．例えば直方体の体積は各辺の長さの積に等しいとか，コンパクトな $B \subset \mathbb{R}^{d-1}$ に対する筒状体 $B \times [0,h] \subset \mathbb{R}^d$ の体積は底面の体積 $\mathrm{Vol}_{d-1}(B)$ と高さ h の積に等しいなど．

一次元の場合と同様に，連続関数のグラフによって上から囲まれている集合の体積が計算できる．

補題 13.15 $K \subset \mathbb{R}^d$ をコンパクト集合，$f : K \to \mathbb{R}$ を連続で非負，$K_f := \{(x,t) \in K \times \mathbb{R} : 0 \le t \le f(x)\}$ とすると，

$$\mathrm{Vol}_{d+1}(K_f) = \int_K f(x)dx.$$

証明　フビニの定理より

$$\mathrm{Vol}_{d+1}(K_f) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \chi_{K_f}(x,t)dtdx = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_0^{f(x)} 1dt\Big)\chi_K(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\chi_K(x)dx$$
$$= \int_K f(x)dx.$$

□

体積の計算に役立つカバリエリ(Cavalieri)の原理を述べる(カバリエリはガリレオの同時代人であるが発見的手法で系 13.17 に到達していた.

定理 13.16 $K \subset \mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とする．$t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$K_t := \{(x^1, \ldots, x^{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1} : (x^1, \ldots, x^{d-1}, t) \in K\}$$

を K と超平面 $\{x_d = t\}$ との交わりとする．すると

$$\mathrm{Vol}_d(K) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Vol}_{d-1}(K_t)dt.$$

系 13.17 $K, K' \subset \mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とし，t に対して $\mathrm{Vol}_{d-1}(K_t) = \mathrm{Vol}_{d-1}(K'_t)$ とおくと,

$$\mathrm{Vol}_d(K) = \mathrm{Vol}_d(K').$$

定理 13.16 の証明 フビニの定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_d(K) &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_K(x^1, \ldots, x^{d-1}, t)dx^1 \ldots dx^{d-1}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{K_t}(x^1, \ldots, x^{d-1})dx^1 \ldots dx^{d-1}dt \\ &\quad (\,\chi_K(x^1, \ldots, x^{d-1}, t) = \chi_{K_t}(x^1, \ldots, x^{d-1}) \text{ なので}\,) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Vol}_{d-1}(K_t)dt\,.\end{aligned}$$

□

例 例として，球の体積を計算する．

$$B^d(0, r) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \le r\}$$

を $\mathbb{R}^d$ の半径 r の閉球体とし,

$$\omega_d := \mathrm{Vol}(B^d(0, 1))$$

とおく．明らかに $\omega_1 = 2$．カバリエリの原理より $|t| \le 1$ で $B^d(0,1)_t = B^{d-1}(0, \sqrt{1-t^2})$ を得，

$$\omega_d = \int_{-1}^{1} \operatorname{Vol}(B^{d-1}(0, \sqrt{1-t^2}))dt. \tag{7}$$

これを計算するために，補題 13.12 から簡単に得られる以下の結果を必要とする．

補題 13.18 $K \subset \mathbb{R}^d$ をコンパクト集合，$\lambda > 0$ とし $\lambda K := \{x \in \mathbb{R}^d : \frac{1}{\lambda}x \in K\}$ とおく．

$$\operatorname{Vol}_d(\lambda K) = \lambda^d \operatorname{Vol}_d(K).$$

証明　補題 13.12 より，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\lambda K}(x)dx = \lambda^d \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\lambda K}(\lambda y)dy = \lambda^d \int_{\mathbb{R}^d} \chi_K(y)dy.$$

□

(7) より

$$\omega_d = \omega_{d-1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{d-1}{2}} dt$$

を得る．さらに $t = \cos x$ とおくと

$$s_d := \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{d-1}{2}} dt = \int_0^{\pi} \sin^d(x)dx\,.$$

部分積分と d に関する帰納法を使うと

$$s_{2k} = \pi \prod_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2i}, s_{2k+1} := 2\prod_{i=1}^{k} \frac{2i}{2i+1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

特に $s_d \cdot s_{d-1} = \frac{2\pi}{d}$, よって

$$\omega_d = \omega_{d-1}s_d = \omega_{d-2}s_{d-1}s_d = \frac{2\pi}{d}\omega_{d-2}.$$

したがって

$$\omega_{2k} = \frac{1}{k!}\pi^k, \omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1}}{1\cdot 3\cdot \ldots (2k+1)}\pi^k.$$

特に

$$\lim_{d\to\infty} \omega_d = 0$$

に注意．すなわち $\mathbb{R}^d$ の単位球体の体積は d が増加するとゼロに収束する．

補題 13.18 よりまた

$$\mathrm{Vol}_d B(0,r) = \omega_d r^d.$$

カバリエリの原理より導かれる結果をさらに挙げる．

系 13.19（回転体の体積） $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を正値連続関数,

$$K := \{(x,y,t)\in\mathbb{R}^2\times[a,b] : x^2+y^2\le f(t)^2\}$$

とする．このとき

$$\mathrm{Vol}\,(K) = \pi\int_a^b f(t)^2 dt.$$

証明 $t\in[a,b]$ に対して

$$K_t = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le f(t)^2\}.$$

よって

$$\mathrm{Vol}(K_t) = \pi f(t)^2.$$

例えば前出の例と定理 13.16 より結果を得る． □

例 例として，回転トーラスの体積を計算する．$0<\rho<R$, $B := \{(t,x,y)\in\mathbb{R}^3 : y=0, (x-R)^2+t^2\le\rho^2\}$ とし，B を t 軸の周りに回転してできる立体を T とする．つまり $T = \{(x,y,t) : (R-\sqrt{\rho^2-t^2})^2 \le x^2+y^2 \le (R+\sqrt{\rho^2-t^2})^2\}$．系 13.19 の証明の中で

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(T) &= \pi\int_{-\rho}^{\rho}((R+\sqrt{\rho^2-t^2})^2-(R-\sqrt{\rho^2-t^2})^2)dt\\ &= 4\pi R\int_{-\rho}^{\rho}\sqrt{\rho^2-t^2}dt\\ &= 4\pi\rho^2 R\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = 2\pi^2\rho^2 R.\end{aligned}$$

回転対称な関数を積分する．これに以下の簡単な補題を使う．

補題 13.20 $K\subset\mathbb{R}^d$ をコンパクト集合 $f\in H_I(\mathbb{R}^d)$ を有界関数とする．K_1, K_2 をコンパクト集合，$K=K_1\cup K_2$ で $\mathrm{Vol}(K_1\cap K_2)=0$ とする．このとき

$$\int_K f(x)dx = \int_{K_1} f(x)dx + \int_{K_2} f(x)dx.$$

証明　積分の単調性(補題 13.4)より，任意のコンパクト集合 A で

$$|\int_A f(x)dx| \le \sup_{x\in A}|f(x)|\cdot\ \mathrm{Vol}\,A. \tag{8}$$

したがって

$$\int_{K_1\cap K_2} f(x)dx = 0. \tag{9}$$

さて

$$\chi_{K_1}+\chi_{K_2}=\chi_K+\chi_{K_1\cap K_2}.$$

よって(9)より

$$\int_{K_1} f(x)dx + \int_{K_2} f(x)dx = \int_K f(x)dx + \int_{K_1\cap K_2} f(x)dx = \int_K f(x)dx\,.$$

□

より一般の場合は後で論じるが，ここでは回転対称な関数を扱う．

定理 13.21 $0\le R_1<R_2$, $f:[R_1,R_2]\to\mathbb{R}$ を連続関数とする．d 次積分は

$$\int_{R_1 \le \|x\| \le R_2} f(\|x\|)dx = d\omega_d \int_{R_1}^{R_2} f(r) r^{d-1} dr.$$

$$(\omega_d = \ d \text{ 次元単位球体の体積，上を見よ})$$

証明 $0 \le \rho \le r$, に対して $A(\rho, r) := \{x \in \mathbb{R}^d : \rho \le \|x\| \le r\}$ とおく．$n \in \mathbb{N}, n \ge 2$ で

$$r_{k,n} := R_1 + \frac{k}{n}(R_2 - R_1) \ \ (k = 0, 1, \ldots, n),$$
$$A_{k,n} := A(r_{k-1,n}, r_{k,n}) \ \ (k = 1, \ldots, n).$$

球体の体積を計算したのと同じ議論で

$$\mathrm{Vol}(A(\rho, r)) = \omega_d (r^d - \rho^d)$$

を得る．特に

$$\mathrm{Vol}\,(A(r, r)) = 0 \quad (\forall\ r)\,. \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \rho_{k,n}^{d-1} &:= \frac{r_{k,n}^d - r_{k-1,n}^d}{d(r_{k,n} - r_{k-1,n})} \\ &= \frac{1}{d}\left(r_{k,n}^{d-1} + r_{k,n}^{d-2} r_{k-1,n} + \ldots + r_{k,n} r_{k-1,n}^{d-2} + r_{k-1,n}^{d-1}\right) \end{aligned}$$

とすると，

$$r_{k-1,n} < \rho_{k,n} < r_{k,n}. \tag{11}$$

$\rho_{k,n}$ の選び方より

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\,(A_{k,n}) &= \omega_d (r_{k,n}^d - r_{k-1,n}^d) \\ &= d\omega_d \rho_{k,n}^{d-1} (r_{k,n} - r_{k-1,n}). \end{aligned} \tag{12}$$

次に $r_{k-1,n} < \|x\| < r_{k,n}$ に対して $t_n(\|x\|) := f(\rho_{k,n})$, $\tau_n(\|x\|) := f(\rho_{k,n})\rho_{k,n}^{d-1}$ とすると，これらは $\|x\| = r_{k,n}$ で半連続となるように拡張できる．補題 13.20（(10)を使う）より

$$\int_{A(R_1,R_2)} t_n(\|x\|)dx = \sum_{k=1}^{n} f(\rho_{k,n}) \int \chi_{A_{k,n}}(x)dx \tag{13}$$

$$= d\omega_d \sum_{k=1}^{n} f(\rho_{k,n})\rho_{k,n}^{d-1}(r_{k,n} - r_{k-1,n}) \quad ((12)\text{ より})$$

$$= d\omega_d \int_{R_1}^{R_2} \tau_n(r)dr$$

を得る．一方 $t_n(\|x\|)$ は f が $A(R_1, R_2)$ で一様連続なので $n \to \infty$ で一様に $f(\|x\|)$ に収束する．一方(11)より $\tau_n(r)$ は $f(r)r^{d-1}$ に一様収束する．したがって $n \to \infty$ とすると，(13)より

$$\int_{A(R_1,R_2)} f(\|x\|)dx = d\omega_d \int_{R_1}^{R_2} f(r)r^{d-1}dr.$$

□

例　1)　$s \in \mathbb{R}, 0 < R_1 < R_2$ に対して

$$\int_{R_1 \le \|x\| \le R_2} \|x\|^s dx = d\omega_d \int_{R_1}^{R_2} r^{d+s-1}dr$$

$$= \begin{cases} \frac{d\omega_d}{d+s}(R_2^{d+s} - R_1^{d+s}) & (s \ne -d) \\ d\omega_d(\log R_2 - \log R_1) & (s = -d). \end{cases}$$

特に，(例えば補題 13.7 を使うと)

$$\int_{R_1 \le \|x\|} \|x\|^s dx = \lim_{R_2 \to \infty} \int_{R_1 \le \|x\| \le R_2} \|x\|^s dx < \infty \iff s < -d$$

$$\int_{\|x\| \le R_2} \|x\|^s dx = \lim_{R_1 \to 0} \int_{R_1 \le \|x\| \le R_2} \|x\|^s dx < \infty \iff s > -d.$$

2)　一次元積分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ を計算したい．e^{-x^2} は $|x| \to \infty$ のとき x のいかなるベキ乗より速く減衰するので，上の積分は存在する．

まず

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

さらに

$$\begin{aligned}
(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \qquad (\text{系 } 13.11 \text{ より}) \\
&= 2\pi\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}rdr \qquad (\text{定理 } 13.21 \text{ より，極限をとると}) \\
&= -\pi\int_{0}^{\infty} \frac{d}{dr}(e^{-r^2})dr = \pi.
\end{aligned}$$

よって，

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

を得る．上の例の極限操作が正当であることは以下のように確かめられる．

関数 f は正値とする．関数列

$$(f \cdot \chi_{\mathring{A}(\frac{1}{n},n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset H_I(\mathbb{R}^d)$$

は単調増大的に f に収束する．補題 13.7 より極限操作

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathring{A}(\frac{1}{n},n)} f(x)dx$$

に意味があることがわかる．(ここで積分は開集合上行う．$\mathrm{Vol}_d(A(r,r)) = 0$ なので特性関数は下半連続であり ((10) 参照)，積分には影響しない．)

13 章の演習

1) $\mathbb{R}^d$ の連結な体積がゼロでない立体で，直方体，ピラミッド(三角錐)，平行多面体，円柱，錘，球体，トーラス，楕円体以外の例を 5 つ挙げ，それらの体積を計算せよ．

2) a) $U^d(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$. どのような $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，積分

$$\int_{U^d(0,1)} \frac{dx}{(1-\|x\|^2)^\lambda}$$

は存在するか？ またその値は？

b) $A(r,R) \subset \mathbb{R}^d \quad (0 < r < R)$,

$$\int_{A(r,R)} \log\|x\| dx$$

を計算せよ．

c)

$$\int_{A(r,R)} e^{-\|x\|^2} dx$$

を計算せよ．

第14章

関数，集合のルベーグ積分

［一般のルベーグ(Lebesgue)積分を定義し，基本的な性質を導く．(積分の)下半連続関数による上からの近似と上半連続関数による下からの近似が一致するとき(関数は)ルベーグ積分可能であるという．集合はその特性関数がルベーグ積分可能なとき，積分可能であるという．］

定義 14.1 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ に対して

$$\int^*_{\mathbb{R}^d} f(x)dx := \inf\{\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx, g\in H_I(\mathbb{R}^d), g\geq f\}\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \text{（上積分）}$$

$$\int_{*\,\mathbb{R}^d} f(x)dx := \sup\{\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx : g\in H_S(\mathbb{R}^d), g\leq f\}\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \text{（下積分）}$$

$$\left(= -\int^*_{\mathbb{R}^d}(-f(x))dx\right)$$

と定義する．

注意 任意の $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ に対して $g_2\leq f\leq g_1$ となる $g_1\in H_I, g_2\in H_S$ が必ず存在する．例えば $g_1\equiv\infty$，$g_2\equiv-\infty$ は条件を満たす．したがって上限，下限をとる集合はそれぞれ空集合ではない．

補題 14.2 （i） 任意の $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ に対して

$$\int_{*\,\mathbb{R}^d} f(x)dx \leq \int^*_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\,.$$

（ii） 任意の $f\in H_I(\mathbb{R}^d)$ または $H_S(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\int_{*\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int^*_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\,.$$

証明　（i）$\varphi \in H_I, \psi \in H_S, \psi \le \varphi$ のとき $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx \le \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx$ を示せば十分である．$-\psi \in H_I$ なので $\varphi - \psi \in H_I$（補題 12.5）であり，かつ $\varphi - \psi \ge 0$ なので，補題 13.8 より

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(x) - \psi(x))dx.$$

したがって

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx \ge \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx.$$

（ii）$f \in H_I(\mathbb{R}^d)$ とする．定義より

$$\int^*_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\,. \tag{1}$$

次に $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ を単調増加列で f に収束するものとする．一方

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)dx \quad \text{（補題 13.7 より）} \tag{2}$$

であり，他方 $g_n \subset H_S(\mathbb{R}^d)$, (i) より

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)dx \le \int_{*\mathbb{R}^d} f(x)dx \le \int^*_{\mathbb{R}^d} f(x)dx. \tag{3}$$

(1), (2), (3) より主張が確かめられる．$f \in H_S(\mathbb{R}^d)$ も同様に示せる．　□

後での便宜のため，上積分の簡単にわかる性質を列挙しておく．同様の性質が下積分でも成立する．

補題 14.3　（i）$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を非負関数，$\lambda \ge 0$ とする．このとき

$$\int^*_{\mathbb{R}^d} \lambda f(x)dx = \lambda \int^*_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\,.$$

（ii） $f \leq g$ であれば

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} f(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d}^{*} g(x)dx\,.$$

（iii） A を $d \times d$ 直交行列，$b \in \mathbb{R}^d$ とする．このとき任意の f に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} f(Ax+b)dx = \int_{\mathbb{R}^d}^{*} f(x)dx\,.$$

証明　補題 13.8 の対応する性質から簡単に導くことができる．　□

以下はルベーグ積分論の主要な収束定理を証明するのに使われる．

定理 14.4 $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を非負関数とする ($n \in \mathbb{N}$)．このとき

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d}^{*} f_n(x)dx\,.$$

証明　上積分の定義より，任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$g_n \in H_I(\mathbb{R}^d)$ が存在して $g_n \geq f_n$ で

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d}^{*} f_n(x)dx + 2^{-n}\varepsilon\,. \tag{4}$$

補題 12.5，補題 12.8 より

$$g := \sum_{n=1}^{\infty} g_n \in H_I(\mathbb{R}^d).$$

$f_n \geq 0$ なので $g_n \geq 0$ であり，補題 13.9 より

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d}^{*} f_n(x)dx + \varepsilon \qquad ((4)\text{ より}). \tag{5}$$

一方，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} g_n = g$. よって補題 14.3 (ii) より

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx. \tag{6}$$

$\varepsilon > 0$ は任意だったので (5)，(6) より主張が確かめられる．　□

定義 14.5 $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ は

$$-\infty < \int_{*\,\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int^{*}_{\mathbb{R}^d} f(x)dx < \infty$$

のとき(ルベーグ)積分可能，もしくは可積分であるという．上積分，下積分が一致したとき，その値を f の(ルベーグ)積分といい $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$ と書く．

補題 14.2 (ii) より

補題 14.6 $f \in H_I(\mathbb{R}^d)$ が積分可能なのは

$$\int f(x)dx < \infty$$

のとき，またそのときに限る．ここで積分は 13 章の意味の積分であり，二つの積分，13 章の積分とこの章の積分が一致する．同様に $f \in H_S(\mathbb{R}^d)$ が積分可能 $\iff$ $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx > -\infty$.

特にすべての $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ は積分可能. □

注意　13 章で定義した積分可能とは異なり，ここでは関数 f の積分 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$ は，定義されれば自動的に有限となる．

ここで正確には述べられないが，後に導入される可測関数の概念を既知の読者ならおそらく自分で考えることのできるある理由から，上積分と下積分が同時に $+\infty$ あるいは $-\infty$ となる場合に f の積分の値として $+\infty$ あるいは $-\infty$ とすることは適切ではない．

以下の補題は定義の簡単な別の定式化を与える．

補題 14.7 $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ が積分可能

$\iff \forall\varepsilon > 0\,\exists g \in H_S, h \in H_I, g \le f \le h : \int_{\mathbb{R}^d} h(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx < \varepsilon$

$\iff$ 単調増加列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_S$ と単調減少列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_I$ が存在し

$$g_n \le f \le h_n,$$
$$-\infty < \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} h_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)dx < \infty,$$

であり二つの積分の共通の値が $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$.

注意　最初の判定条件より，$\int_{\mathbb{R}^d} h(x)dx$，$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx$ は有限であり，これよりさらに f の上積分と下積分が有限でなくてはならないこと，そして上積分と下積分の値が一致することがわかる

2 番目の判定条件は単調性以外の条件は最初の条件と同値である．一方，任意の列 $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_S$, $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_I$ が 2 番目の判定条件における単調性以外の条件を満たすとすると，単調列

$$g_n := \sup_{1\le i\le n} \{g'_i\}, h_n := \inf_{1\le i\le n} \{h'_i\}$$

も条件を満たす．よって 2 番目の判定条件と 1 番目の判定条件は同値である．

定理 14.8　$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ とする．

（i）f が積分可能 $\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d) : \int^*_{\mathbb{R}^d} |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon.$

（ii）$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ が $\lim_{n\to\infty} \int^*_{\mathbb{R}^d} |f(x) - \varphi_n(x)|dx = 0$ を満たすとき $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)dx.$

証明　（i）“$\Longrightarrow$”：補題 14.7 より $g \in H_S, h \in H_I$ が存在し $g \le f \le h$ で $\int_{\mathbb{R}^d} h(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$. 一方 $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ が存在し $\varphi \le h$ で $h \in H_I$ の積分の定義より

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$|f - \varphi| \le |h - \varphi| + |h - f| \le |h - \varphi| + |h - g| = (h - \varphi) + (h - g).$$

したがって補題 14.3 (ii) より

$$\int^*_{\mathbb{R}^d} |f(x) - \varphi(x)|dx \le \int^*_{\mathbb{R}^d} (h(x) - \varphi(x))dx + \int^*_{\mathbb{R}^d} (h(x) - g(x))dx < \varepsilon.$$

“$\Longleftarrow$”：$\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ が $\int^*_{\mathbb{R}^d} |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon$ を満たせば，$h \in H_I$ が存在し $|f - \varphi| \le h$，$\int_{\mathbb{R}^d} h(x)dx < 2\varepsilon$（$\mathbb{R}^d$ 上の上積分の定義より）．すると，

$$-h + \varphi \le f \le h + \varphi$$

(φ は有限なので，和がすべての点で定義される) となり，$-h+\varphi \in H_S, h+\varphi \in H_I$ (12 章と比較せよ)，

$$\int_{\mathbb{R}^d} (h(x)+\varphi(x))dx - \int_{\mathbb{R}^d} (-h(x)+\varphi(x))dx = 2\int_{\mathbb{R}^d} h(x)dx < 4\varepsilon$$

を得る．補題 14.7 の最初の条件を満たすので f は積分可能．

(ii) (i) より，f は積分可能．$\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$ を

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} |f(x) - \varphi_n(x)|dx < \varepsilon$$

となるものとする．$h_n \in H_I(\mathbb{R}^d)$ が存在して

$$|f - \varphi_n| \leq h_n, \int_{\mathbb{R}^d} h_n(x)dx < 2\varepsilon.$$

したがって $-h_n + \varphi_n \leq f \leq h_n + \varphi_n$ であり，

$$\int_{\mathbb{R}^d} (-h_n(x)+\varphi_n(x))dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} (h_n(x)+\varphi_n(x))dx.$$

よって

$$|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)dx| \leq \int_{\mathbb{R}^d} h_n(x)dx < 2\varepsilon.$$

定理の結論を得る．　□

定理 14.9　f が積分可能であれば $|f|, f^+ := \sup(f,0), f^- := -\inf(f,0)$ が積分可能で

$$|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx. \tag{7}$$

逆に f^+，f^- が積分可能であれば f も積分可能である．

f_1，f_2 が積分可能であれば $\sup(f_1, f_2)$，$\inf(f_1, f_2)$ も積分可能である．

証明　定理 14.8 の条件 (i) を使う．$\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ が $\int_{\mathbb{R}^d}^{*} |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon$ を満たせば $||f| - |\varphi|| \leq |f - \varphi|$ より

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} ||f(x)| - |\varphi(x)||dx < \varepsilon.$$

したがって定理 14.8 (i) より $|f|$ の積分可能性が示せる．$-|f| \le f \le |f|$ なので，上積分の単調性(補題 14.3 (ii))と積分可能関数の積分の単調性より不等式(7)が従う．f の積分可能性より $|f^{\pm} - \varphi^{\pm}| \le |f - \varphi|$ なので，同様に $f^{\pm}$ の積分可能性も従う．逆に f^{+}，f^{-} が積分可能であれば 定理 14.8 (i) より，$\varphi, \psi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ が存在し

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} |f^{+}(x) - \varphi(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} |f^{-}(x) - \psi(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$f = f^{+} - f^{-}$，$\varphi - \psi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ なので

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} |f(x) - (\varphi(x) - \psi(x))|dx < \varepsilon$$

を得，よって f が積分可能であることは定理 14.8 (i) より示せる．

最後の主張には補題 14.7 の条件を使う．$g_1, g_2 \in H_S, h_1, h_2 \in H_I$ が存在し $g_1 \le f_1 \le h_1, g_2 \le f_2 \le h_2$ であり，また

$$\int_{\mathbb{R}^d} h_i(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} g_i(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} \ (i = 1, 2).$$

次に $\sup(g_1, g_2) \le \sup(f_1, f_2) \le \sup(h_1, h_2)$ であり，$\sup(h_1, h_2) - \sup(g_1, g_2)$ $\le h_1 + h_2 - g_1 - g_2$ なので

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup(h_1, h_2)(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} \sup(g_1, g_2)(x)dx < \varepsilon.$$

したがって $\sup(f_1, f_2)$ は補題 14.7 より積分可能であり，同様に $\inf(f_1, f_2)$ が積分可能であることも示せる． □

補題 14.10 f を積分可能とする．$A \in GL(d, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^d$. $x \mapsto f(Ax + b)$ は積分可能で

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Ax + b)dx = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\,.$$

証明　補題 13.12 より．□

定義 14.11 $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : f$ 積分可能$\}$.

ここで関数は $\pm\infty$ を値としてとらないとする．このようにすることで $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$ に属する関数を各点ごとに足すなどの操作を行うことができる．後に零集合を学び，これが積分論にいかなる制限をも与えてないことを見る．

定理 14.12 $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$ はベクトル空間であり，$\int_{\mathbb{R}^d} : \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ は線形で単調．つまり

$$f \leq g \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx.$$

証明　$\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$ がベクトル空間であることは，上の注より従う．積分が線形であることは定理 14.8 より，単調性は上積分の単調性より (補題 14.3 (ii)) 従う．□

定義 14.13 $A \subset \mathbb{R}^d$ が積分可能 $\Longleftrightarrow$ χ_A が積分可能．A が積分可能なとき A のルベーグ測度，もしくは体積を

$$\mathrm{Vol}\,(A) := \mathrm{Vol}\,_d(A) := \int_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x)dx$$

で定義する．任意の $\mathbb{R}^d$ の部分集合 A の外測度と内測度をそれぞれ

$$\mu^*(A) := \int^*_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x)dx, \qquad \mu_*(A) := \int_{*\,\mathbb{R}^d} \chi_A(x)dx$$

で定義する．したがって A は $\mu^*(A)$ と $\mu_*(A)$ が一致して有限なとき，またそのときに限り積分可能である．

定理 14.14 A が開または閉のとき A が積分可能なのは $\mu^*(A)$ が有限なとき，またそのときに限る．特にコンパクト集合，有界開集合は積分可能である．

証明　A が開または閉のとき，χ_A は，それぞれ下半連続，または上半連続 (12 章を見よ) であり，半連続関数の上積分，下積分は補題 14.2 (ii) によって一致する．さらに，任意の有界集合 A はある立方体 W に含まれ，上積分の単調性より

$$\mu^*(A) \le \mu^*(W) < \infty.$$

□

定理 14.15 A, B が積分可能であれば $A \cup B, A \cap B$ $A \backslash B$ は積分可能で

$$\mathrm{Vol}\,(A \cup B) + \mathrm{Vol}\,(A \cap B) = \mathrm{Vol}\,(A) + \mathrm{Vol}\,(B),$$
$$\mathrm{Vol}\,(A \backslash B) = \mathrm{Vol}\,(A) - \mathrm{Vol}\,(A \cap B).$$

証明 特性関数に対して

$$\chi_{A \cap B} = \inf(\chi_A, \chi_B)$$
$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$$
$$\chi_{A \backslash B} = \chi_A - \chi_{A \cap B}.$$

$A \cap B$ の積分可能性は定理 14.9 より従い，$A \cup B$ と $A \backslash B$ の積分可能性は対応する体積の公式と定理 14.12 より従う． □

定義 14.16 $A \subset \mathbb{R}^d, f : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ とする．

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d \backslash A \end{cases}$$

で定義される関数 $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が積分可能のとき f は A 上で積分可能という．このとき

$$\int_A f(x)dx := \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(x)dx.$$

14 章の演習

1） a） $W \subset \mathbb{R}^d$ を立方体，$f : W \to \mathbb{R}$ を非負積分可能関数とする．$x_0 \in W$ で f が連続で $f(x_0) > 0$ とする．

$$\int_W f(x)dx > 0$$

を示せ．

b) $W \subset \mathbb{R}^d$ を立方体，$f : W \to \mathbb{R}$ を連続非負，$\int_W f(x)dx = 0$ とする．W 上 $f \equiv 0$ を示せ．

c) (a)，(b) を立方体だけでなく，一般の集合の場合に拡張せよ．

2) 以下の積分を計算せよ．

a) $K := [0,2] \times [3,4], \int_K (2x+3y)dxdy.$

b) $K := [1,2] \times [1,2], \int_K e^{x+y}dxdy.$

c) $K := [0,1] \times [0,1], \int_K (xy+y^2)dxdy.$

d) $K := [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{2}], \int_K \sin(x+y)dxdy.$

e) $K := [1,2] \times [2,3] \times [0,2], \int_K \frac{2z}{(x+y)^2}dxdydz.$

f) $K := [0,1] \times [0,1] \times [0,1], \int_K \frac{x^2z^3}{1+y^2}dxdydz.$

g) $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}, n, m \in \mathbb{N}, \int_K x^n y^m dxdy.$

3) V を有限次元ベクトル空間 ($\mathbb{R}$ 上の) とする．ルベーグ積分の概念を $f : \mathbb{R}^d \to V$ の場合に拡張せよ．積分可能性の判定条件を与えよ．特に $V = \mathbb{C}$ の場合

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx$$

を示せ．

4) $f : [r_1, R_1] \times [r_2, R_2] \to \mathbb{R}$ を有界関数とする．任意の $x \in [r_1, R_1]$ で $f(x,\cdot)$ が $[r_2, R_2]$ 上可積分とし，また任意の $y \in [r_2, R_2]$ に対して，$f(\cdot, y)$ が $[r_1, R_1]$ 上連続とする．関数

$$F(x) := \int_{r_2}^{R_2} f(x,y)dy$$

が $[r_1, R_1]$ で連続であることを示せ．

5）$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を積分可能とする．$x \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & -n \leq f(x) \leq n \\ n & f(x) > n \\ -n & f(x) < -n \end{cases}$$

とおく．f_n が積分可能であること，$|f_n - f|$ が各点で 0 に収束すること

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx$$

を示せ．

6）（リーマン積分）$T(\mathbb{R}^d)$ を階段関数のなすベクトル空間とする．つまり $t \in T(\mathbb{R}^d)$ はある立方体 $W \subset \mathbb{R}^d$ で定義され，適当な小部分立方体上定数である．すなわち，

$$W = \bigcup_{i=1}^{n} W_i, \quad W_i \text{ は立方体で } \mathring{W}_i \cap \mathring{W}_j = \emptyset \ (i \neq j),$$

$$t|_{\mathring{W}_i} = c_i.$$

W_i の一辺の長さを l_i と書くと，t は積分可能で

$$\int_{\mathbb{R}^d} t(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i l_i^d.$$

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ がリーマン積分可能であるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^d)$ が存在して

$$\psi \leq f \leq \varphi$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx < \varepsilon$$

となることである．リーマン積分可能な関数はルベーグ積分可能であること，また

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \inf\{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx : \varphi \in T(\mathbb{R}^d), \varphi \geq f\}$$
$$= \sup\{\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx : \psi \in T(\mathbb{R}^d), \psi \leq f\}$$

を示せ．

7）前の演習問題の用語を使う．関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数のとき} \\ 0 & x \text{ が無理数のとき} \end{cases}$$

はリーマン積分可能でないことを示せ．

8）f, g を積分可能で f は有界とする．fg が積分可能であることを示せ．また f が有界であることが必要であることを示すような例を挙げよ．

9）$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が有界で，適当な定数 c と $\lambda > 0$ が存在して

$$|f(x)| \leq \frac{c}{\|x\|^{d+\lambda}}$$

を満たしているとする．f が積分可能であることを示せ．

第 15 章

零関数と零集合．フビニの定理

［ 零関数(すなわち任意の集合上の積分が 0 となる関数)，零集合(すなわち体積が 0 の集合)は積分論では無視してよい．特に可算集合やユークリッド空間の次元の低い部分集合は零集合である．重積分は積分の順序によらないというフビニの定理が示される． ］

まず例から始めよう．$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \text{ が有理数} \\ 0, & x \text{ が無理数} \end{cases}$$

で定義する．f は可積分で $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$ である．

証明のために $n \mapsto x_n$ を $\mathbb{N}$ から有理数の集合への全単射とする．(有理数は可算集合であることを思い出せ.)　また $\varepsilon > 0$ とせよ．

$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$U_n := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_n| < \varepsilon \cdot 2^{-n}\}$$

$$U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

とせよ．U は構成の仕方よりすべての有理数を含む．したがって

$$f \leq \chi_U \leq \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{U_n}. \tag{1}$$

さらに定理 14.4 より

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{U_n}(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int^{*} \chi_{U_n}(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{1-n} = 2\varepsilon.$$

よって(1)より

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} f(x)dx \leq 2\varepsilon. \tag{2}$$

一方 f は非負値なので

$$\int_{*\mathbb{R}} f(x)dx \geq 0. \tag{3}$$

$\varepsilon > 0$ はいくらでも小さくとれるので補題 14.2 (i) と不等式(2)，(3) より f は可積分で

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0.$$

ここで，この例で見たような現象を系統的に扱うために必要な概念を導入しよう．

定義 15.1 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ は $\int_{\mathbb{R}^d}^{*} |f(x)|dx = 0$ のとき零関数という．$A \subset \mathbb{R}^d$ は χ_A が零関数のとき，零集合という．

以下の補題で，いくつかの自明な注をまとめておく．

補題 15.2 f を零関数，$\lambda \in \mathbb{R}, |g| \leq |f|$ とするとき，λf，g もまた零関数である．零集合の部分集合はまた零集合である．　□

次の補題は上の例で見た現象を説明している．

補題 15.3 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を非負零関数とすると，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ もまた零関数である．$(N_m)_{m\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{R}^d$ の零集合の列のとき，$N := \cup_{m\in\mathbb{N}} N_m$ もまた零集合である．

証明　最初の主張は定理 14.4 よりただちに従う．2 番目の主張は $\chi_N \leq \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{N_m}$ なので，1 番目の主張から明らか．　□

系 15.4 （i） $\mathbb{R}^d$ の可算集合は零集合．

（ii） $\mathbb{R}^d$ の超平面は零集合．

証明　（i）まず，$\mathbb{R}^d$ の一点は零集合．なぜなら一点はいくらでも小さな体積の立方体に含まれるからである．可算集合は一点集合の可算和なので 補題 15.3 より零集合である．

(ii) L を $\mathbb{R}^d$ の超平面とする．$x_0 \in L, x_0 = (x_0^1, \dots x_0^d)$ とし $W(L,n) := \{x = (x^1, \dots x^d) \in L : \sup_{1 \le i \le d} |x_0^i - x^i| \le n\}$ とおく．以下のように $\mathrm{Vol}\,_d W(L,n) = 0$ であることを確かめられる．ルベーグ測度は $\mathbb{R}^d$ の等長変換で不変なので，一般性を失わず $L = \{x = (x^1, \dots, x^d) : \ x^d = 0\}$ と仮定してよい．

$\varepsilon > 0$ に対して

$$Q(L,n,\varepsilon) := \{x = (x^1, \dots, x^d) : (x^1, \dots, x^{d-1}, 0) \in W(L,n), |x^d| \le \varepsilon\}$$

とおく．$Q(L,n,\varepsilon)$ は直方体で

$$\mathrm{Vol}\,_d Q(L,n,\varepsilon) = (2n)^{d-1} \cdot 2\varepsilon \quad (\text{補題 13.14 と比べよ}).$$

$W(L,n) \subset Q(L,n,\varepsilon)$ なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\mathrm{Vol}_d W(L,n) \le (2n)^{d-1} 2\varepsilon,$$

よって

$$\mathrm{Vol}_d W(L,n) = 0.$$

$L = \cup_{n \in \mathbb{N}} W(L,n)$ なので，補題 15.3 より主張が従う． □

以下の結果はすでに学んだが，ここで別の証明を与えよう．

系 15.5 $\mathbb{R}$ は非可算．

証明 もし $\mathbb{R}$ が可算であるとすると，$[0,1]$ も可算になるが，そうであるとすると系 15.4 (i) より

$$1 = \int_0^1 dx = \ \mathrm{vol}\ [0,1] = 0$$

となって矛盾． □

例 カントール (Cantor) 集合と呼ばれている $\mathbb{R}$ の非可算零集合を構成しよう．

$[0,1]$ から，真ん中の $1/3$ の開区間 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ を取り除き

$$S_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

を得る．S_1 から，再び両側の部分区間の真ん中の 1/3 の開区間，つまり $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ と $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ を取り除き

$$S_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

を得る．この操作を繰り返す．つまり n 回目のステップでは S_{n-1} の各部分区間の真ん中の 1/3 の開区間をすべて取り除き，互いに交わらない 2^n 個のコンパクトで長さ 3^{-n} の開区間の和集合 S_n を得る．最後に

$$S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

とおく．明らかに，各 $n \geq 2$ で

$$S \subset S_n \subset S_{n-1},$$

$$\operatorname{Vol} S_n = (\frac{2}{3})^n$$

なので，特に $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Vol} S_n = 0$. よって S は零集合，S が非可算であることは，もし全単射

$$\mathbb{N} \to S$$

$$m \mapsto x_m$$

があると仮定すると矛盾が生じることを見て確かめよう．このため $x \in S$ に 0 または 1 を値とする列を以下のように対応させる．

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

とし，帰納的に $n \in \mathbb{N}$ に対し，S_{n-1} から S_n を構成する段階で x が属している S_{n-1} の区間の最初の 1/3 部分区間に属している場合 $\lambda_n(x) = 0$，x が 3 番目の部分区間に属している場合 $\lambda_n(x) = 1$ とする．これにより $(\lambda_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ を定義する．逆に 0 または 1 に値をとる任意の列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，上のように S の点が対応する．異なる列には S の異なる点が対応する．

$m \mapsto x_m$ を S の番号付けとする．

$x \in S$ を

$$\lambda_m(x) = \begin{cases} 0 & \lambda_m(x_m) = 1 \\ 1 & \lambda_m(x_m) = 0 \end{cases}$$

で定義する.

$$\lambda_m(x_m) \neq \lambda_m(x)$$

なので, $x = x_m$ となる $m \in \mathbb{N}$ は存在しない.

したがって x は上の番号付けには含まれず, これは S が番号付け可能であるとしたことに矛盾する.

定義 15.6 性質 $E(x)$ がほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^d$ で成立する, ほとんどいたるところで成り立つということを,

$$\{x \in \mathbb{R}^d : E(x) \text{ が成立しない }\}$$

が零集合となることで定義する.

補題 15.7 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が零関数になるのは $f = 0$ がほとんどいたるところで成り立つとき, またそのときに限る. (つまり $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}$ が零集合.)

証明 $N := \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > 0\}$ とおく.

$$|f| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} m\chi_N, \quad \chi_N \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} m|f|.$$

N が零集合であれば, 定理 14.4 より

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} |f(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^d}^{*} \sup_{m \in \mathbb{N}} m\chi_N(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d}^{*} \sum_{m=1}^{\infty} m\chi_N(x)dx = 0.$$

よって f は零関数. 逆に f が零関数であれば, 定理 14.4 より

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} \chi_N(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^d}^{*} \sup_{m \in \mathbb{N}} m|f(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^d}^{*} \sum_{m=1}^{\infty} m|f(x)|dx = 0.$$

よって N は零集合. □

補題 15.8 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が $\int_{\mathbb{R}^d}^{*} |f(x)|dx < \infty$ (例えば f は可積分) と

すると，f はほとんどいたるところ有限.

証明　集合 $N := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = \pm\infty\}$ が零集合であることを示す．任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\chi_N \leq \varepsilon |f|.$$

したがって

$$\int_{\mathbb{R}^d}^* \chi_N(x)dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d}^* |f(x)|dx.$$

任意の正の ε に対して，上が成立するので $\int_{\mathbb{R}^d}^* \chi_N(x)dx = 0$．よって N は零集合.　□

補題 15.9　$f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を，ほとんどいたるところ $f = g$ とする．f が可積分であれば g も可積分で，その積分の値は等しい.

証明　$N := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq g(x)\}$ とし，$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $C_c(\mathbb{R}^d)$ の列で

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d}^* |f(x) - \varphi_n(x)|dx = 0 \tag{4}$$

となるものとする．$|g - \varphi_n| \leq |f - \varphi_n| + \sup_{m\in\mathbb{N}} m\chi_N$ なので，補題 15.7 の証明と同様に

$$\int_{\mathbb{R}^d}^* |g(x) - \varphi_n(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^d}^* |f(x) - \varphi_n(x)|dx.$$

よって，(4) より

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d}^* |g(x) - \varphi_n(x)|dx = 0.$$

定理 14.8 より g が可積分であることがわかり

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

□

補題 15.8，15.9 より可積分関数 f を f とほとんどいたるところ一致する

関数と取り替えても f の積分の値は変わらない．このことで $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$ の定義の意味がはっきりする．定義 14.11 を見よ．

後のために以下の言葉を用意する．

定義 15.10 関数 $f, g : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が同値であるとは A 上ほとんどいたるところで一致することである (つまり $N := \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ は零集合).

ここでは f と g のうち一方もしくは双方とも A 上ほとんどいたるところでしか定義されてない場合に対しても同値であるという．つまり

$$f : A \backslash N_1 \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, g : A \backslash N_2 \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

に対して N_1, N_2, $\{x \in A \backslash (N_1 \cup N_2) : f(x) \neq g(x)\}$ が零集合である場合にも同値であるという．補題 15.9 は f が可積分であれば，f と同値なすべての関数が可積分であり，同じ積分の値を持つことを主張している．

定義 15.11 $A \subset \mathbb{R}^d$ に対して $L^1(A)$ を A 上可積分な関数の同値類の集合とする (前に述べたように $f : A \to \mathbb{R}$ を考えれば十分である)．$f \in L^1(A)$ に対して

$$\|f\|_{L^1(A)} := \int_A |f(x)| dx$$

とおく．ただしここで積分は f の同値類に属する任意の関数の積分であると理解する

定理 15.12 $L^1(A)$ はベクトル空間であり $\|\cdot\|_{L^1(A)}$ は $L^1(A)$ のノルムを与える．

証明 f_1 と g_1，f_2 と g_2 がそれぞれ同値であり，$\lambda \in \mathbb{R}$ とする．このとき $f_1 + f_2$ と $g_1 + g_2$，λf_1 と λg_1 はそれぞれ同値である．したがって同値類の集合 $L^1(A)$ はベクトル空間である．

14 章で学んだ積分に関する初等的な性質より $\|\cdot\|_{L^1(A)}$ は三角不等式を満たすこと，スカラー倍はその絶対値がノルムの外にでることがわかる．したがって $\|\cdot\|_{L^1(A)}$ がノルムであることを見るには正定値であることを示せば

よい．つまり

$$\|f\|_{L^1(A)} = 0 \iff f = 0 \ (A\text{上ほとんどいたるところ})$$

（右辺は f が恒等的にゼロな関数の同値類に属しているという意味）．しかし，これは補題 15.7 よりただちに従う．□

後に $L^1(A)$ はバナッハ空間であることを示す．

最後にフビニ（Fubini）の定理の一般形を学ぶ．

定理 15.13 $f : \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を可積分関数，$x = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^d$ とする．このとき零集合 $N \subset \mathbb{R}^d$ が存在して，任意の $\eta \in \mathbb{R}^d \backslash N$ に対して，関数

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^c &\to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ \xi &\mapsto f(\xi, \eta) \end{aligned}$$

は可積分となる．$\eta \in \mathbb{R}^d \backslash N$ に対して

$$f_1(\eta) := \int_{\mathbb{R}^c} f(\xi, \eta) d\xi$$

とおく．（$\eta \in N$ に対して $f_1(\eta)$ の値は，任意の数，例えば 0，としておく．）f_1 は可積分で

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_1(\eta) d\eta = \int_{\mathbb{R}^{c+d}} f(x) dx.$$

（フビニの定理の主張は以下のように覚えると覚えやすい．$x = (\xi, \eta)$ とおくと

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{c+d}} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} (\int_{\mathbb{R}^c} f(\xi, \eta) d\xi) d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^c} (\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi, \eta) d\eta) d\xi \end{aligned}$$

が可積分関数 f で成り立つ．最後の等式は ξ の役割と η の役割が対称であること，もしくは $(\xi, \eta) \mapsto (\eta, \xi)$ が直交変換であり，ルベーグ積分が直交座標変換で不変であることから導かれる．）

証明 f が可積分なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$g \le f \le h$ なる関数 $g \in H_S(\mathbb{R}^{c+d})$, $h \in H_I(\mathbb{R}^{c+d})$ が存在して，

$$\int_{\mathbb{R}^{c+d}} h(x)dx - \int_{\mathbb{R}^{c+d}} g(x)dx < \varepsilon \text{（補題 14.7 より）} \tag{5}$$

となる．

$$f_{1*}(\eta) = \int_{*\,\mathbb{R}^c} f(\xi,\eta)d\xi,\ f_1^*(\eta) = \int_{\mathbb{R}^c}^{*} f(\xi,\eta)d\xi$$

とおき，さらに

$$g_1(\eta) := \int_{\mathbb{R}^c} g(\xi,\eta)d\xi,\ h_1(\eta) := \int_{\mathbb{R}^c} h(\xi,\eta)d\xi$$

とおく．半連続関数に関するフビニの定理（定理 13.10）より $g_1 \in H_S(\mathbb{R}^d)$, $h_1 \in H_I(\mathbb{R}^d)$ であり，また

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_1(\eta)d\eta = \int_{\mathbb{R}^{c+d}} g(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} h_1(\eta)d\eta = \int_{\mathbb{R}^{c+d}} h(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{6}$$

$g \le f \le h$ なので，補題 14.2 (i) より

$$g_1(\eta) \le f_{1*}(\eta) \le f_1^*(\eta) \le h_1(\eta) \tag{7}$$

が従う．

(5)，(6) より

$$\int_{\mathbb{R}^d} h_1(\eta)d\eta - \int_{\mathbb{R}^d} g_1(\eta)d\eta < \varepsilon. \tag{8}$$

再び補題 14.7 より（(7)，(8) を用いて）$f_{1*}(\eta)$，$f_1^*(\eta)$ が可積分で（(5)，(6)，(7) を用いると）その積分の値が一致して $\int_{\mathbb{R}^{c+d}} f(x)dx$ に等しくなることがわかる．つまり

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_{1*}(\eta)d\eta = \int_{\mathbb{R}^d} f_1^*(\eta)d\eta = \int_{\mathbb{R}^{c+d}} f(x)dx. \tag{9}$$

$f_{1*} \le f_1^*$ なので，補題 15.8 と (9) より f_{1*}, f_1^* はほとんどいたるところ等

しく，いずれもほとんどいたるところ有限であることがわかる．

よって，ほとんどすべての η で積分 $\int_{*\,\mathbb{R}^c} f(\xi,\eta)d\xi$ と $\int^*_{\mathbb{R}^c} f(\xi,\eta)d\xi$ が一致し有限．よって零集合 N と任意の $\eta \in \mathbb{R}^d \backslash N$ で，関数

$$\xi \mapsto f(\xi,\eta)$$

は $\mathbb{R}^c$ 上可積分で

$$f_1(\eta)(= \int_{\mathbb{R}^c} f(\xi,\eta)d\xi) = f_{1*}(\eta) = f_1^*(\eta).$$

(9) と補題 15.9 より主張が確かめられる．□

15 章の演習

1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を零関数の有界列とすると $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}$ もまた零関数であることを示せ．

2) a) $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1\}$ を単位正方形

$$f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

とする．以下の積分が双方存在すること，しかし

$$\int_0^1 \Bigl(\int_0^1 f(x,y)dx\Bigr)dy \neq \int_0^1 \Bigl(\int_0^1 f(x,y)dy\Bigr)dx$$

であることを示せ．これはフビニの定理と矛盾しているか？

b) $f : Q \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) := \begin{cases} y^{-2} & 0 < x < y < 1 \\ -x^{-2} & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定義し a) と同様の結果を示せ．

第16章

ルベーグ積分論における収束定理

［基本的な収束定理，ある条件の下に関数列の極限の積分と，関数列の積分の極限が一致することを保証するファトウ(Fatou)，レビ(B. Levi)，ルベーグ(Lebesgue)の収束定理を学ぶ．例によって条件が必要なことを見る．応用としてパラメーターの付きの関数の積分の微分を正当化する．］

この章では以下の問題を考える．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を可積分関数の列とし，f_n がある関数 f に収束するとする．ただし収束の意味，例えば各点収束とか，ほとんどいたるところでの収束など，は後に明らかにする．どのような仮定をすれば，f は可積分になりまた，いつ $\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx$ となるか？

どのようなことが問題になりうるかを知るためにまず例を見よう．

例　1）$f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \|x\| < n \\ 0 & \|x\| \geq n \end{cases}$$

で定義する．すべての n で f_n は $H_I(\mathbb{R}^d)$ に属し，よって可積分である．しかし，すべての $x \in \mathbb{R}^d$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ なので，$\lim f_n$ は可積分ではない．

2）次に $\lim f_n$ が可積分であっても，$\int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx$ が成立しない例を見よう．$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$f_n(x) := \begin{cases} n & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

すべての f_n は可積分であり，すべての n で

$$\int_{[0,1]} f_n(x)dx = 1.$$

一方ほとんどすべての点で($x = 0$ 以外のすべての点で) $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ なので

$$\int_0^1 \lim f_n(x)dx = 0.$$

まずレビ(Beppo Levi)の単調収束定理を証明しよう.

定理 16.1 $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を可積分関数の単調増加列(すべての n で $f_n \leq f_{n+1}$)とする. もし

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx < \infty$$

((f_n) は単調なので, 極限が $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に存在する)であれば

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n$$

もまた可積分で(f_n の単調性より, すべての $x \in \mathbb{R}^d$ で上の極限が $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に存在し),

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx.$$

証明

$$N_n := \{x \in \mathbb{R}^d : f_n(x) = \pm\infty\},$$
$$N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$$

とおく. 補題 15.8 より, すべての N_n は零集合で, 補題 15.3 より N もまた零集合. 単調性より

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} |f(x) - f_m(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^d}^{*} \sum_{n=m}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x))dx$$
$$\leq \sum_{n=m}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d}^{*} (f_{n+1}(x) - f_n(x))dx$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (f_{n+1}(x) - f_m(x))dx$$

（f_n の積分可能性を使った）

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} f_m(x)dx.$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $m \in \mathbb{N}$ を十分大きく選ぶことで

$$|\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx - \int f_m(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

とでき，前の不等式より

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} |f(x) - f_m(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

を得る．f_m は可積分なので，定理 14.8 より $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} |f_m(x) - \varphi(x)|\ dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

(2)，(3) より

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{*} |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon$$

であり，また(1)より

$$|\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx| < \varepsilon$$

も成立する．

定理 14.8 より f は可積分で

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx.$$

□

同様の結果が単調減少列の場合も成立する．上記の例 1 では積分の極限は無限であったし，例 2 では極限が単調でないことに注意しよう．

定理 16.1 を少し変更して

系 16.2（B. レビ） $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を非負，可積分関数列とする．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx < \infty$$

であれば，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ もまた可積分で

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx.$$

証明　定理 16.1 を部分和の列に対して使えばよい． □

次に以下を証明する．

補題 16.3 $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を可積分関数列とする．可積分関数 $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が存在して

$$f_n \geq F \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

であれば $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ もまた可積分である．

同様に可積分な $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が存在し

$$f_n \leq G \ (\forall n)$$

であれば $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ は可積分である．

証明

$$g_n := \inf_{i\leq n} f_i$$

とおくことで，可積分関数の単調減少列を得る．つまり n で $g_{n+1} \leq g_n$ で

$$g_n \geq F.$$

よって

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)dx \geq \int_{\mathbb{R}^d} F(x)dx > -\infty.$$

単調収束定理より $f = \lim_{n\to\infty} g_n$ の積分可能性がわかる．2 番目の主張も，

$$h_n := \sup_{i \le n} f_i$$

を考えることで同様に示せる． □

次は普通ファトウ(Fatou)の補題という．

定理 16.4 $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を可積分関数の列とする．可積分関数 $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が存在して

$$f_n \ge F \ (\forall n)$$

を満たすと仮定する．さらに

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx \le K < \infty \ (\forall n)$$

のとき，$\liminf_{n\to\infty} f_n$ は可積分で

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx.$$

証明 $g_n := \inf_{i \ge n} f_i$ とおく．補題 16.3 より g_n は可積分．さらに

$$g_n \le g_{n+1}, g_n \le f_m \ (\forall n, \forall m \ge n).$$

よって

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)dx \le K$$

がすべての n で成立する．

単調収束定理より

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$$

は可積分で

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)dx$$

$$\le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx.$$

□

上の例 1 で積分は一様に有界ではない．この例で lim sup に関する対応する結果が成立しないのは，積分の上限がないためである．例 2 は定理 16.4 の不等式で，等号は一般に成立しないことを示している．

ルベーグ (H. Lebesgue) の優収束定理を学ぶ．

定理 16.5 $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を可積分関数の列で $\mathbb{R}^d$ のほとんどいたるところで $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に各点収束するとする．さらに可積分関数 $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が存在して

$$|f_n| \leq G \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

であるとする．このとき f は可積分で

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx. \tag{4}$$

証明　必要なら零集合上で f_n，f の値を変えることですべての関数は有限値であり

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ (\forall\, x \in \mathbb{R}^d)$$

と仮定してよい．(f が無限値をとるのは，G が無限値をとっている場合しかなく，したがって無限値をとるのは高々零集合の上でしかないことに注意．補題 15.8 を参照.)　定理 16.4 の仮定が $K = \int_{\mathbb{R}^d} G(x)dx$ に対して成立するので，f は可積分 ($f = \lim f_n = \liminf f_n$ に注意) であり

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx.$$

同様に

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx$$

を示せる．これらの不等式より主張が従う．　□

例 1，例 2 で関数 f_n は絶対値が可積分関数で押さえられてはいない．よって定理 16.5 は適用できない．しかし以下が成立する．

系 16.6 $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を可積分関数とする．さらに，ある可積分関数 $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が存在して

$$|\lim_{n\to\infty} f_n| \le F \tag{5}$$

とする．このとき $\lim_{n\to\infty} f_n$ は可積分．

証明

$$h_n := \sup\{\inf(f_n, F), -F\}$$

とおく．(5) より $\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} f_n$ がわかり，関数列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は定理 16.5 の仮定を満たす．これより主張が示せる． □

系 16.7 $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とする．

$$A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

とおく．$f : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して，すべての n で $f_{|A_n}$ は A_n 上可積分で

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f(x)| dx < \infty$$

とする．このとき f は A 上可積分で

$$\int_A f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)dx.$$

証明　これまでの結果を使えるように $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$ 上 $f(x) = 0$ とおくことで $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ としておく．

関数

$$f_n = f\chi_{A_n}$$

を考えよ．まず $|f_n|$ は単調に $|f|$ に収束し，これは可積分．よって定理 16.5 の仮定が $G = |f|$ に対して成立し，主張が確かめられる． □

系 16.8 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合，$f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を可積分関数，$\varepsilon > 0$ とする．有界開集合 Ω' が存在して $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ であり，また

$$|\int_\Omega f(x)dx - \int_{\Omega'} f(x)dx| < \varepsilon$$

を満たす．

証明　まず，すべての有界開集合 $\Omega' \subset \Omega$ で $f_{|\Omega'}$ は可積分であることを見る．このため定理 14.9 より，一般性を失わずに $f \geq 0$ としてよい．例えば定理 16.5 を使えば $f_{|\Omega'} = \lim_{n\to\infty}(\inf(f, n\chi_{\Omega'}))$ は可積分である（特性関数 $\chi_{\Omega'}$ は Ω' が有界開集合なら可積分であることに注意）．$\Omega_n := \{x \in \Omega : \|x\| < n, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}\}$ とおく．すると Ω_n は有界開集合で $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$．系 16.7 より

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} f(x)dx.$$

よって Ω' を（ε によって決まる）十分大きな n に対する Ω_n とすれば良い．□

系 16.9　$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合，$f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を可積分関数，$\varepsilon > 0$ とする．$\delta > 0$ が存在して，$\Omega_0 \subset \Omega$ が $Vol(\Omega_0) < \delta$ を満たせば

$$\left|\int_{\Omega_0} f(x)dx\right| < \varepsilon \tag{6}$$

が成立する．

証明　もし，そうでないとすると $\varepsilon_0 > 0$ と Ω の部分集合列 $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \text{Vol}(\Omega_n) = 0 \tag{7}$$

$$\left|\int_{\Omega_n} f(x)dx\right| > \varepsilon_0 \quad (\forall n) \tag{8}$$

を満たす．$f_n := f\chi_{\Omega\setminus\Omega_n}$ とおく．このとき，すべての n に対して $|f_n| \leq |f|$ であり，更に(7)より f_n はほとんど至るところ各点ごとに f に収束する．優収束定理 16.5 より

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$$

を得る．しかし

$$\int_{\Omega} f(x)dx = \int_{\Omega\setminus\Omega_n} f(x)dx + \int_{\Omega_n} f(x)dx$$
$$= \int_{\Omega} f_n(x)dx + \int_{\Omega_n} f(x)d$$

なので，(8) より

$$|\int_{\Omega} f(x)dx - \int_{\Omega} f_n(x)dx| > \varepsilon_0$$

となり矛盾である． □

優収束定理の直接の応用としてパラメーターのついた積分を考える．

定理 16.10 $U \subset \mathbb{R}^d, y_0 \in U, f : \mathbb{R}^c \times U \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ とおき，以下を満たすとする．

a) 各 $y \in U$ について $x \mapsto f(x, y)$ が可積分．

b) ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^c$ で $y \mapsto f(x, y)$ は y_0 で連続．

c) 可積分関数 $F : \mathbb{R}^c \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が存在して，各 $y \in U$ に対して

$$|f(x, y)| \leq F(x)$$

が $\mathbb{R}^c$ 上ほとんどいたるところで成立する．

このとき関数

$$g(y) := \int_{\mathbb{R}^c} f(x, y)dx$$

は y_0 で連続である．

証明 $y_n \to y_0$ となる任意の列 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ で

$$g(y_n) \to g(y_0) \tag{9}$$

が成立することを見る．

$$f_n(x) := f(x, y_n) \ (n \in \mathbb{N}), f_0(x) := f(x, y_0)$$

とおく．(b)より，ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^c$ で

$$f_0(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

(a), (c)より定理16.5の仮定を満たし，よって

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^c} f_n(x)dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^c} f_0(x)dx = g(y_0).$$

□

定理 16.11 積分と微分の順序交換

$I \subset \mathbb{R}$ を開区間とし $f : \mathbb{R}^c \times I \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ とする．

a) 各 $t \in I$ で関数 $x \mapsto f(x,t)$ は可積分,

b) ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^c$ で $t \mapsto f(x,t)$ は有限で t に関して I 上微分可能,

c) 可積分関数 $F : \mathbb{R}^c \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が存在して各 $t \in I$ に対して

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq F(x)$$

がほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^c$ で成立するとする．

このとき，関数

$$g(t) := \int_{\mathbb{R}^c} f(x,t)dx$$

は I 上微分可能で

$$g'(t) = \int_{\mathbb{R}^c} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

証明　任意の列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ で $h_n \to 0$ となるものに対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^c}\frac{1}{h_n}(f(x,t+h_n)-f(x,t))dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}^c}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx \tag{10}$$

が成り立つことを見ればよい．左辺は $g(t)$ の微分商である．

$$f_n(x)=\frac{1}{h_n}(f(x,t+h_n)-f(x,t)),$$
$$f_0(x)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \tag{11}$$

とおく．平均値の定理よりほとんどすべての $x\in\mathbb{R}^c$ に対して，(b) より，$-h_n\le\theta_n\le h_n$ となる $\theta_n=\theta_n(x)$ が存在して

$$f_n(x)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\theta_n)$$

を満たす．(a) より f_n は可積分で，(c) より $|f_n(x)|\le F(x)$ が成立する．よって定理 16.5 より

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^c}f_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}^c}f_0(x)dx.$$

(11) のように定義したので，これは (10) を意味する． □

16 章の演習

1） $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を積分可能，$a,b\in\mathbb{R}, a<b$ とする．

$$\lim_{t\to 0}\int_a^b|f(x+t)-f(x)|dx=0$$

を示し $\lim_{t\to 0}\int_a^b f(x+t)dx=\int_a^b f(x)dx$ を確かめよ．

2） a）（ガンマ関数）$\lambda>0$ とするとき

$$\Gamma(\lambda):=\int_0^\infty e^{-x}x^{\lambda-1}dx$$

が存在することを示せ．

b）$n\in\mathbb{N}, \frac{|x|}{n}<1$ に対して

$$(1-\frac{x}{n})^n \le (1-\frac{x}{n+1})^{n+1} \quad (0\text{ 章を参照})$$

を確かめよ．

c）$x > 0$ に対して

$$\frac{x-1}{x} \le \int_1^x \frac{1}{t}dt \le x-1$$

を示せ．

d）(a)-(c) を用いて $\lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^{\lambda-1}dx = \Gamma(\lambda)$ を示せ．

e）$\lambda > 1$ に対して $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} x^{\lambda-1}dx = \Gamma(\lambda)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\lambda}$ を示せ．

（ヒント；$\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}$.）

3）$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を非負可積分関数の単調減少列で

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx = 0$$

となるものとする．(f_n) がほとんどいたるところ 0 に収束することを示せ．また，この収束は必ずしもすべての点ではないことを示す例を作れ．

4）$x > 0$ に対して

$$f(x) := \int_0^\infty e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$$

とおく．積分記号の下で x に関して何度でも微分できることを示し，公式

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!$$

を部分積分を使わずに証明せよ．

5）$f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ を可積分関数の列で $\sum_{n=1}^\infty |f_n|$ もまた可積分であるとする．

$$\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{n=1}^\infty f_n(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx$$

を示せ．

第 17 章

可測関数，可測集合，イェンセンの不等式，エゴロフの定理

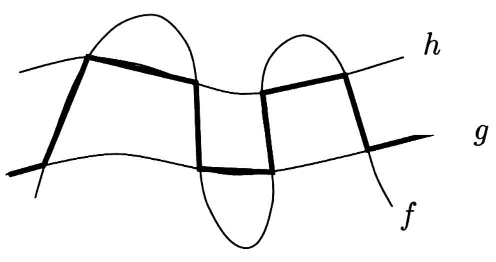
［ 可測関数，可測集合の概念を導入する．可測関数は有限値関数の各点収束の極限として特徴づけられる．凸関数の積分に関するイェンセン(Jensen)の不等式や，ほとんどいたるところ収束する関数列はいくらでも小さい測度の集合の外で一様に収束するというエゴロフ(Egorov)の定理を導く． ］

関数 f の可積分性を定義したとき，f の積分値が有限であることを要請した．したがってすべての連続関数が $\mathbb{R}^d$ 上積分可能とは限らない．例えば，ゼロでない定数関数は $\mathbb{R}^d$ 上積分可能ではない．$\mathbb{R}^d$ の連続関数と，$\mathbb{R}^d$ 上の積分可能関数を含むような関数の大きなクラスを定義しよう．

定義 17.1 f, g, h を $\mathbb{R}^d$ 上定義された関数で $g \leq h$ となるものとする．中間値関数 $\mathrm{med}(g, f, h)$ を

$$\mathrm{med}\,(g, f, h) := \inf\{\sup(f, g), h\}$$

で定義する．f を上から h で，下から g で切りとったものなので，中間値関数と呼ぶ．



定義 17.2 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ は，各コンパクト立方体 $W \subset \mathbb{R}^d$ と，任意の $\mu > 0$ に対して $\mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, f, \mu\chi_W)$ が可積分なとき，可測関数という．

定理 17.3

（i）すべての連続関数，すべての可積分関数は可測．

（ii）f，g が可測であれば，$|f|, f^+, f^-, \alpha f + \beta g$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$，$\sup(f, g)$，$\inf(f, g)$ も可測．

（iii）可測関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がほとんどすべての点で f に収束するとき，f は可測．

証明　（ii）W をコンパクト立方体，$\mu > 0$ とすると

$$\mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, |f|, \mu\chi_W) = |\,\mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, f, \mu\chi_W)|.$$

f が可測であれば，右辺は可積分（定理 14.9），よって $|f|$ は可測．

$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_n := \ \mathrm{med}\,(-n\mu\chi_W, f, n\mu\chi_W)$$

とおき，g_n も同様に定義する．このとき f，g が可測なので f_n，g_n は積分可能．$x \in \mathbb{R}^d \backslash W$ のとき，$f_n(x) = 0 = g_n(x)$，$x \in W$ のとき $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ なので

$$\lim_{n\to\infty} \ \mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, \alpha f_n + \beta g_n, \mu\chi_W) = \ \mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, \alpha f + \beta g, \mu\chi_W).$$

$\mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, \alpha f_n + \beta g_n, \mu\chi_W)$ は可積分（定理 14.9）で

$$|\,\mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, \alpha f_n + \beta g_n, \mu\chi_W)| \leq \mu\chi_W.$$

よって，優収束定理より $\mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, \alpha f + \beta g, \mu\chi_W)$ は積分可能，よって $\alpha f + \beta g$ は可測．

$f^+, f^-, \sup(f, g), \inf(f, g)$ の可測性は

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$$
$$f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$
$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|$$
$$\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g|$$

より従う．（i）f が連続であれば f^+，f^- も連続．関数 $f^+\chi_W$，$f^-\chi_W$ は $H_S(\mathbb{R}^d)$ に属し，よって可積分．これより

$$\mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, f^+, \mu\chi_W)$$

は可積分で，f^+ は可測．同様に f^- も可測．(ii) より $f = f^+ - f^-$ もまた可測．

f が可積分なら定理 14.9 より $\mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, f, \mu\chi_W)$ も可積分で，f は可測．

(iii) 関数 f_n が可測なので，関数 $\mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, f_n, \mu\chi_W)$ は可積分で仮定より，ほとんどいたるところ $\mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, f, \mu\chi_W)$ に収束する．さらに $|\,\mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, f_n, \mu\chi_W)| \leq \mu\chi_W$ で，優収束定理により $\mathrm{med}\,(-\mu\chi_W, f, \mu\chi_W)$ の積分可能性がわかり，よって f が可測．□

補題 17.4 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が可測なのは任意の非負可積分関数 $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に対して

$$\mathrm{med}\,(-g, f, g)$$

が積分可能なとき，またそのときに限る．

証明 "$\Longleftarrow$"：明らか．

"$\Longrightarrow$"：

$$W_n = \{x = (x^1, \ldots x^d) \in \mathbb{R}^d : |x^i| \leq n \ (i = 1, \ldots d),$$
$$f_n = \mathrm{med}\,(-n\chi_{W_n}, f, n\chi_{W_n}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

とおく．仮定より f_n は可積分．さらに $\mathrm{med}\,(-g, f_n, g)$ も可積分（定理 14.9）

で，g の絶対値で評価できるので，$\mathrm{med}\,(-g, f, g)$ に収束．優収束定理より $\mathrm{med}\,(-g, f, g)$ は可積分．□

定理 17.5 f が可測で，ある積分可能な g が存在して $|f| \le g$ のとき，f は積分可能．

証明 仮定により $f = \mathrm{med}\,(-g, f, g)$ なので補題 17.4 より，結果が従う．□

系 17.6 f が可測で，$|f|$ が積分可能であれば，f は積分可能．□

15 章で学んだことから以下が導かれる．

補題 17.7 f が可測で，ほとんどいたるところ $f = g$ であれば g も可測．

定義 17.8 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ は，その特性関数が可測なとき，可測という．A が可測であるが，積分可能でないとき，$\mathrm{Vol}\,(A) = \infty$ と表す．

定理 14.15 と同様に，定理 17.3 を使うと，A，B が可測であれば，$A \cup B$，$A \cap B$，$A \backslash B$ もまた可測であることがわかる．しかし優収束定理を使えば，より強い結果を得る

定理 17.9 (i) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^d$ が可測であれば $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ は可測で $\mathrm{Vol}\,(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Vol}\,(A_n)$.

(ii) $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を可測集合の列とする．このとき $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ は可測で $\mathrm{Vol}\,(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Vol}\,(B_n)$. もし B_n が互いに交わらないとき $\mathrm{Vol}\,(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Vol}\,(B_n)$.

(iii) $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ が可測で $\mathrm{Vol}(C_1) < \infty$ のとき，$\mathrm{Vol}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Vol}(C_n)$.

証明 (i) は $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}\,(A_n) < \infty$ の場合には，優収束定理を関数 χ_{A_n} に対して用いることで確かめられる．それ以外の場合は $\mathrm{Vol}\,(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$.

(ii) は (i) を $A_n = \cup_{j=1}^{n} B_j$ として適用し，公式

$$\mathrm{Vol}\,(A \cup B) + \mathrm{Vol}\,(A \cap B) = \mathrm{Vol}\,A + \mathrm{Vol}\,B$$

を可測集合 A, B に対して用いる(定理 14.15).

(iii)は(i)を $A_n = C_1\backslash C_n$ として適用する．つまり $C_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(C_1) &= \mathrm{Vol}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\Big) + \mathrm{Vol}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \quad \text{(再び定理 14.15 より)}\\ &= \mathrm{Vol}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\Big) + \mathrm{Vol}(C_1) - \lim_{n\to\infty} \mathrm{Vol}(C_n)\\ &\qquad\qquad \text{((i)と定理 14.15 より)}.\end{aligned}$$

□

定義 17.10 $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は互いに交わらない可測集合 $B_1, \ldots, B_k \subset \mathbb{R}^d$ と $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\varphi = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{B_j}$$

となるとき，単関数という．

定理 17.11 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して以下の条件は同値．

(i) f は可測．

(ii) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して集合 $A_c := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq c\}$ が可測．

(iii) f は単関数の各点収束極限(ほとんどいたるところではなく，すべての点で収束しているとする)．

証明 "(iii) ⇒ (i)"：定理 17.3 (iii)よりの直接の帰結．

"(i) ⇒ (ii)"：$c \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f_n(x) := n \min(f(x), c) - n \min(f(x), c - \frac{1}{n})$$

とおく．$f(x) \geq c$ のとき $f_n(x) = 1$, $f(x) < c$ のとき $\forall n \geq N$ (N は x による)で $f_n(x) = 0$．よって

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \chi_{A_c}.$$

定理 17.3 (iii) より χ_{A_c} は可測，よって A_c は可測.
"(ii) ⇒ (iii)"：$n \in \mathbb{N}$ と $j = 1, \ldots, n2^{n+1}$ に対し，

$$c_{n,j} := -n + (j-1)2^{-n}$$
$$B_{n,j} := \{c_{n,j} \le f(x) < c_{n,j+1}\},$$
$$\varphi_n := \sum_{j=1}^{n \cdot 2^{n+1}} c_{n,j} \chi_{B_{n,j}}$$

とおく．$B_{n,j} = A_{c_{n,j}} \setminus A_{c_{n,j+1}}$ は仮定より可測，よって φ_n は単関数．さらに φ_n は各点ごとに f に収束. □

注意　f が可測で有界，$|f| \le K$, とすると，$n \ge K$ に対して

$$|f - \varphi_n| \le 2^{-n}$$

が上の証明で使った関数 φ_n に対して成立する．この場合 f は単関数の一様収束極限である．この設定で，基本となっている考え方は，ルベーグ積分論では，リーマン積分論のように関数の定義域を一様に分割し関数を階段関数の極限として表すのではなく，値域を一様に分割し関数を単関数の極限であると考えている．関数 φ_n は f が下から有界の場合例えば $f \ge -K$ のとき

$$\varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f$$

が，すべての $n \ge K$ で成立するように構成したことに注意する．この場合 f は単調増加する単関数の極限となっている．

系 17.12　$f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を可測関数，$Q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき $h(x) = Q(f_1(x), \ldots, f_k(x))$ と定義すると，関数 h は可測.

証明　定理 17.11 より，関数 $f_1, \ldots, f_k$ は単関数 $\varphi_{1,n}, \ldots, \varphi_{k,n}$ の極限．$\eta_n(x) := Q(\varphi_{1,n}(x), \ldots, \varphi_{k,n}(x))$ もまた単関数．Q は連続なので η_n は各点ごとに h に収束．定理 17.11 より主張を得る. □

系 17.13　f，g が可測であれば，$f \cdot g$ も可測.

証明　系 17.12 で $Q(x^1, x^2) = x^1 \cdot x^2$ とおけばよい. □

次に凸関数に関するイェンセン(Jensen)の不等式を導く．関数

$$K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

が凸関数とは，任意の $x,y\in\mathbb{R}, 0\le t\le 1$ に対して

$$K(tx+(1-t)y)\le tK(x)+(1-t)K(y) \tag{1}$$

となることであった．帰納法により凸関数は，$i=1,\ldots,n$ で $x_i\in\mathbb{R}$, $0\le t_i\le 1$ であり $\sum_{i=1}^n t_i=1$ となるとき

$$K\Bigl(\sum_{i=1}^n t_ix_i\Bigr)\le\sum_{i=1}^n t_kK(x_i) \tag{2}$$

を満たすことが確かめられる．

定理 17.14（イェンセンの不等式） $B\subset\mathbb{R}^d$ を有界で可測な集合，$f:B\to\mathbb{R}$ を可積分関数，$K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を凸関数とする．$K\circ f:B\to\mathbb{R}$ もまた可積分であるとき

$$K\Bigl(\frac{1}{\mathrm{Vol}(B)}\int_B f(x)dx\Bigr)\le\frac{1}{\mathrm{Vol}(B)}\int_B K(f(x))dx. \tag{3}$$

証明　まず，f が単関数，つまり

$$f=\sum_{i=1}^n c_i\chi_{B_i}$$

の場合を考える．ただし，ここで $B_i, i=1,\ldots,n$ は互いに交わらない可測集合で

$$\bigcup_{i=1}^n B_i=B \tag{4}$$

となるものとする．

この場合

$$
\begin{aligned}
K\Big(\frac{1}{\mathrm{Vol}\ (B)}\int_B \sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{B_i}\Big) &= K\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{Vol}\ (B_i)}{\mathrm{Vol}\ (B)}c_i\Big) \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{Vol}\ (B_i)}{\mathrm{Vol}\ (B)}K(c_i) \quad ((2)\text{ より}) \\
&\quad \Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{Vol}\ (B_i)}{\mathrm{Vol}\ (B)} = 1, \quad (4)\text{ より}\Big) \\
&= \frac{1}{\mathrm{Vol}\ (B)}\sum_{i=1}^{d}\int_B K(c_i)\chi_{B_i}.
\end{aligned}
$$

これは，求める不等式である．

次に，一般の f について f を定理 17.11 のように単関数で近似することで主張を示したい．K が $f(B)$ 上有界なとき，優収束定理 16.5 より単関数に対して成り立っている不等式が f に関しても成立する．一般の場合

$$A_n := \{x \in B : |f(x)| \le n\}$$

を考える．$|f|$ は可積分で，f も可積分（定理 14.9 より）である．

$$\int_{B\setminus A_n} |f(x)|dx \ge n\ \mathrm{Vol}\ (B\setminus A_n)$$

なので，

$$\lim_{n\to\infty}\ \mathrm{Vol}\ (B\setminus A_n) = 0 \qquad (5)$$

を得，よって

$$\lim_{n\to\infty}\ \mathrm{Vol}\ (A_n) = \ \mathrm{Vol}\ (B). \qquad (6)$$

すでに見たことよりイェンセンの不等式が A_n について成立する．つまり

$$K\Big(\frac{1}{\mathrm{Vol}\ (A_n)}\int_{A_n} f(x)dx\Big) \le \frac{1}{\mathrm{Vol}\ (A_n)}\int_{A_n} K(f(x))dx.$$

(5)，(6) より，系 16.7 と凸関数が連続であることより（より一般の設定での証明に関しては補題 22.5 を見よ），$n \to \infty$ とすることで (3) を得る．□

次にエゴロフ (Egorov) の定理を示す．

定理 17.15 $A \subset \mathbb{R}^d$ を可測集合で $\mathrm{Vol}\,(A) < \infty$ とし，関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は可測で，A 上ほとんどいたるところで可測関数 f に収束すると仮定する．任意の $\varepsilon > 0$ に対して可測な $B \subset A$ が存在して

$$\mathrm{Vol}\,(A \backslash B) < \varepsilon$$

で，f_n が f に B 上一様に収束する（$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に A 上ほとんど一様に収束するという）．

証明 $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$C_{m,n} := \bigcup_{\nu=n}^{\infty} \{x \in A : |f_\nu(x) - f(x)| \geq 2^{-m}\}$$

とおく．定理 17.9 (iii) より，f_n が A 上ほとんどいたるところで f に収束するので，各 m に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Vol}\,(C_{m,n}) = \mathrm{Vol}\,\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{m,n}\Big) = 0.$$

よって，各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $N(m) \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$\mathrm{Vol}\,(C_{m,N(m)}) < \varepsilon 2^{-m}.$$

$B := A \backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{m,N(m)}$ は

$$\mathrm{Vol}\,(A \backslash B) < \varepsilon \quad (\text{定理 17.9 (ii) より})$$

を満たす．また構成の仕方より $x \in B$ に対して

$$|f_\nu(x) - f(x)| < 2^{-m} \quad \forall\, \nu \geq N(m)$$

となり，これは B 上一様収束を意味する． □

本書では主にルベーグ測度を扱っている．しかしながら，数学の多くの分野ではルベーグ測度以外の測度を考える必要がある．そこで，ここでは抽象的な測度論を簡単に紹介しよう．実際，測度論はルベーグ測度論を自然な形で抽象化したものとして提示できる．このように公理的に取り扱うために，集合からなるある種の性質を満たす集合を考える必要がある．

定義 17.16 集合 M の部分集合からなる空でない集合 Σ が

(i) $A \in \Sigma$ のとき $M \backslash A \in \Sigma$,

(ii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ であれば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

を満たすとき，σ 代数と言う．

M の σ-代数に関して簡単に分かることは，$\emptyset \in \Sigma$，$M \in \Sigma$, さらに $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset$

Σ であれば $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ などである．

定義 17.17 M を集合，Σ をその σ 代数とする．

関数 $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, 即ち

$$0 \le \mu(A) \le \infty \quad (\forall A \in \Sigma)$$

で，

$$\mu(\emptyset) = 0$$

となるものが，互いに交わらない $A_n \in \Sigma, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

（可算加法性）を満たすとき (M, Σ) 上の測度という．

$$\mu(M) = 1$$

となる測度 μ を確率測度と呼ぶ．

この定義の主眼は定理 14.15，17.9 におけるルベーグ測度の性質を測度の持つべき公理とすることにある．定理 17.9 の (ii)，更に (i)，(iii) が測度 μ と集合 $A_n, B_n, C_n \in \Sigma$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して成立することは容易に分かる．定理 17.9 の証明では，公式

$$\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) \quad (\forall A_1, A_2 \in \Sigma)$$

と，単調性，即ち $A_1 \subset A_2, A_1, A_2 \in \Sigma$ に対して

$$\mu(A_1) \le \mu(A_2)$$

となることを使った．例えば，後者は一般の測度の場合にも，$A_2 \backslash A_1 = M \backslash (A_1 \cup M \backslash A_2) \in \Sigma$（定義 17.16 の (i)，(ii) より）なので

$$\begin{aligned} \mu(A_2) &= \mu(A_1) + \mu(A_2 \backslash A_1) \quad &&(\mu \text{の加法性より}) \\ &\ge \mu(A_1) &&(\mu \text{ の非負性より}) \end{aligned}$$

という形で示せる．

定義 17.18 集合 M, M の σ 代数 Σ，測度 $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ からなる三つ組み (M, Σ, μ) を測度空間と呼ぶ．Σ の元は可測であると言う．

定義 17.19 (M, Σ, μ) を測度空間とする．ある性質が $\mu(M \backslash A) = 0$ となる集合 $A \in \Sigma$ 上成り立つ，つまり測度ゼロの集合を除いて，その性質が満たされるとき，μ に関して至るところ成り立つという．

定義 17.20 (M, Σ, μ) を測度空間とする．関数 $f : M \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ は，任

意の $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$A_c := \{x \in M : f(x) \geq c\} \in \Sigma.$$

を満たすとき，可測であるという．

補題 17.21 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を測度空間 (M, Σ, μ) の可測関数の列とする．このとき

$$\liminf_{n\to\infty} f_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n$$

は可測である．特に

$$\lim_{n\to\infty} f_n$$

は極限が存在すれば可測である．

証明 関数 f が可測であれば，またそのときに限り，集合

$$B_c := \{x \in M : f(x) < c\}$$

は可測であることは，$B_c = M \backslash A_c$ に注意すれば分かる．

可測関数の列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して

$$\{x \in M : \inf_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) < c\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in M : g_n(x) < c\}$$

が成立する．右辺の集合は可測なので，左辺の集合もまた可測である．よって $\inf_{n\in\mathbb{N}} g_n$ もまた可測関数である．同様の理由で $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$ も可測である．

これより f_n が可測であれば

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_m \inf_{n\geq m} f_n(x)$$
$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_m \sup_{n\geq m} f_n(x)$$

もまた可測である． □

補題 17.21 より，この節で学んだルベーグ測度に関する可測関数に関する結果はすべて，一般の測度 μ に関する可測関数に関する結果に拡張できる．特に，定理 17.11 で見たように、可測関数は単関数の各点収束の極限として特徴付けられる．またエゴロフの定理 17.15 も，一般の状況で成立する．

17 章の演習

1) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を可測関数とし，

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & f(x) \neq 0 \\ 0 & f(x) = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく．g が可測であることを以下の方法で示せ．

a) 集合 $A_c := \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) \geq c\}$ が任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して可測であることを示すことで.

b) g が単関数の各点収束極限であることを示すことで.

2) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を非負可測関数とする．f は単関数 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の単調増加列の各点収束極限である．f が積分可能なのは列 $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)dx$ がある有限値に収束するとき，またそのときに限ることを示せ．さらにこのとき

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)dx$$

を示せ.

3) $A \subset \mathbb{R}^d$ を可積分，$f : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が可測でほとんどいたるところ有限とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある有界可測関数 g が存在し

$$\mathrm{Vol}\ \{x \in A : g(x) \neq f(x)\} < \varepsilon$$

となることを示せ.

4) $A \subset \mathbb{R}^d$ を可測有界集合とする.

a) $f : A \to \mathbb{R}$ を非負可積分関数とする.

$$\lim_{n\to\infty} n\ \mathrm{Vol}\ \{x : f(x) > n\} = 0$$

を示せ.

b) 逆にこの極限がゼロになれば，非負可測関数 f は積分可能か？

c) 可測関数 $f : A \to \mathbb{R}$ が積分可能なのは

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Vol}\ \{x : |f(x)| \geq n\} < \infty$$

となるとき，またそのときに限ることを示せ.

5) $A \subset \mathbb{R}^d$ を可測集合とし，$f_n, f : A \to \mathbb{R}$ を可測関数とする ($n \in \mathbb{N}$). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $B \subset A$ で $\mathrm{Vol}\ (B) < \varepsilon$ となるものが存在して f_n が f に $A \backslash B$ 上一様に収束するとき $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f ほとんど一様に収束するという．f_n が f にほとんど一様に収束するとき，f_n は f にほとんどいたるところ，つまり零集合を除いて，各点ごとに収束することを示せ.

（これはエゴロフの定理の逆である.）

第 18 章

変換公式

［重積分の一般的な変換公式を導く．ユークリッド座標から極座標への変換公式について詳しく論じる．］

定義 18.1 $U, V \subset \mathbb{R}^d$ を開集合をする．全単射写像 $\Phi : U \to V$ は Φ と Φ^{-1} が連続であるとき同相写像といい，Φ と Φ^{-1} が連続微分可能のとき微分同相写像という．

この章の目標は，重積分に関する以下の変換公式を導くことである．

定理 18.2 $U, V \subset \mathbb{R}^d$ を開集合，$\Phi : U \to V$ を微分同相写像とする．関数 $f : V \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ は関数 $(f \circ \Phi)|\det D\Phi|$ が U 上可積分であるとき，またそのときに限り可積分である．また，このとき

$$\int_{\Phi(U)} f(y)dy = \int_U f(\Phi(x))|\det D\Phi(x)|dx$$

が成立する．

まず以下を証明しよう．

補題 18.3 $U, V \subset \mathbb{R}^d$ を開集合，$\Phi : U \to V$ を同相写像とし，Φ が $x_0 \in U$ で微分可能とする．このとき，U に含まれる開または閉立方体の列 $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，x_0 を含み，一辺の長さが $n \to \infty$ で 0 に収束するものに対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}\,(\Phi(W_n))}{\mathrm{Vol}\,(W_n)} = |\det D\Phi(x_0)|. \tag{1}$$

証明 まず，Φ がアフィン線形変換の場合には，補題 13.12 より主張が正しいことに注意する．

補題 13.12 の証明で見たように $|\det P_1| = 1 = |\det P_2|$ となる行列 P_1, P_2 と，対角行列 D が存在し

$$D\Phi(x_0) = P_1 D P_2$$

と表される．最初に注意したように，線形変換に対しては補題の主張は正しく，任意の可測集合 A と線形変換 P で $|\det P| = 1$ となるものに対して $\mathrm{Vol}\,(PA) = \mathrm{Vol}\,(A)$ である．したがって，必要なら Φ を $P_1^{-1}\Phi P_2^{-1}$ と取り替えることで $D\Phi(x_0)$ は対角行列

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$$

であるとして良い．

記号を簡単にするために

$$x_0 = 0 = \Phi(x_0)$$

と仮定する．微分の定義より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して $\|x - x_0\| < \delta$ であれば

$$\|\Phi(x) - \Phi(x_0) - D\Phi(x_0)(x - x_0)\| \leq \varepsilon \|x - x_0\|$$

なので，上記のように仮定しておけば，$\|x\| < \delta$ となる x で

$$\|\Phi(x) - D \cdot x\| \leq \varepsilon \|x\|. \tag{2}$$

2 つの場合に分けて考える．

1) $|\det D| = |\det D\Phi(x_0)| = 0$ の場合．このとき，少なくとも一つの対角成分 λ_i はゼロで DW_n が超平面 $\{x^i = 0\}$ に含まれる．$\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を(2)のようにとり，W_n の一辺の長さ ℓ_n を $\ell_n < \delta$ となるようにとっておく．仮定より，十分大きな n に対してこのようにできる．

(2) より $\Phi(W_n)$ は x^i 軸方向の辺の長さが

$$(|\lambda_i| + 2\varepsilon)\ell_n$$

の直方体に含まれる．少なくとも一つの λ_i が消えているので $L := \max_{i=1,\dots d} |\lambda_i|$ とおくと

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(\Phi(W_n))}{\mathrm{Vol}\,(W_n)} \leq (L+2\varepsilon)^{d-1} 2\varepsilon$$

となり，よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}\,(\Phi(W_n))}{\mathrm{Vol}\,(W_n)} = 0.$$

2）$|\det D| = |\det D\Phi(x_0)| \neq 0$ の場合．Φ のかわりに，写像 $D^{-1} \circ \Phi$ を考えよ．x_0 での微分は $D^{-1} \cdot D\Phi(x_0) = \mathrm{id}$ で与えられるので

$$D = \mathrm{id}$$

としてよい．このようにしておくと，$\|x\| < \delta$ に対して

$$\|\Phi(x) - x\| \leq \varepsilon \|x\| \tag{3}$$

が成り立つ．

$\varepsilon < \frac{1}{4}$ とし，W_n の一辺の長さ ℓ_n を

$$\ell_n < \delta$$

となるようにとる．W_n^-，W_n^+ を W_n の同心の立方体で，一辺の長さが，それぞれ $(1-3\varepsilon)\ell_n$，$(1+3\varepsilon)\ell_n$ となるものとする．十分大きな n で W_n^+ は U に含まれる．

(3) より

$$\Phi(W_n) \subset W_n^+$$

であり，Φ が同相なので $\Phi(\partial W_n) = \partial\Phi(W_n)$ が成立する．

(3) より，

$$\Phi(\partial W_n) \cap W_n^- = \emptyset$$

なので

$$\partial\Phi(W_n) \cap W_n^- = \emptyset. \tag{4}$$

一方，Φ は W_n の中心を高々$\frac{1}{2}\varepsilon\ell_n$ しか動かさない．$\varepsilon < \frac{1}{4}$ としておいたので，W_n の中心は $\frac{1}{2}(1-3\varepsilon)\ell_n$ 未満しか動かない．したがって，(3) より

$$\Phi(W_n) \cap W_n^- \neq \emptyset. \tag{5}$$

W_n^- は連結で (4)，(5) を満たすので，

$$W_n^- \subset \Phi(W_n).$$

これらをすべて併せると

$$W_n^- \subset \Phi(W_n) \subset W_n^+$$

なので $\ell_n < \delta$ であれば

$$(1-3\varepsilon)^d \le \frac{\mathrm{Vol}\,(\Phi(W_n))}{\mathrm{Vol}\,(W_n)} \le (1+3\varepsilon)^d.$$

これより

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}\,(\Phi(W_n))}{\mathrm{Vol}\,(W_n)} = 1$$

を得る．　□

定義 18.4 点 x_0 を含み，一辺の長さがゼロに収束する任意の開または閉立方体の列 W_n に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}\,(\Phi(W_n))}{\mathrm{Vol}\,(W_n)} = \Delta_\Phi(x_0)$$

となるとき，Φ は x_0 で測度微分 $\Delta_\Phi(x_0)$ を持つという．

補題 18.5 Φ が測度微分 $\Delta_\Phi(x)$ を閉立方体 W 上の各点で持ち，

$$\Delta_\Phi(x) \le K \tag{5}$$

となるとする．このとき，任意の立方体 $W' \subset W$ で

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(\Phi(W'))}{\mathrm{Vol}\,(W')} \le K. \tag{6}$$

証明　ある W' に対して

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(\Phi(W'))}{\mathrm{Vol}\,(W')} \ge K_1 > K \tag{7}$$

であるとしよう．$\partial W'$ は零集合なので W' は閉としてよい(例えば系 15.4 より)．$\mathrm{Vol}\,(\overline{W}') =$ $\mathrm{Vol}(W')$ で $\mathrm{Vol}\,(\Phi(\overline{W}')) \geq$ $\mathrm{Vol}\,(\Phi(W'))$ なので(7)は閉包に対しても成立する．W' を 2^d 個の同じ大きさで，互いに内部では交わらない小立方体に分割する．少なくともそのうちの一つ，W_1 としよう，で

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(\Phi(W_1))}{\mathrm{Vol}\,(W_1)} \geq K_1$$

が成り立つ．

分割を続けることで，立方体の列 $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(\Phi(W_n))}{\mathrm{Vol}\,(W_n)} \geq K_1 \tag{8}$$

となるものを得る．x_0 を W_n 中心の極限とする．x_0 はすべての W_n に含まれる．(8) より

$$\Delta_\Phi(x_0) \geq K_1$$

を得るが，これは仮定(5)に矛盾する．つまり(7)はありえないことがわかる.□

補題 18.6 $U \subset \mathbb{R}^d$ を開集合，$\Phi : U \to \mathbb{R}^d$ を一対一，連続で測度微分 $\Delta_\Phi(x)$ を U 上持つとする．Δ_Φ が U の任意のコンパクト部分集合上有界なとき，$\overline{W} \subset U$ となる任意の(開または閉)立方体 W で

$$\mathrm{Vol}\,(\Phi(W)) = \int\limits_W \Delta_\Phi(x)dx. \tag{9}$$

証明 W を小立方体 $W_1, \ldots, W_k$ に分割する．ここで，

$$W = \bigcup_{i=1}^k W_i,\ W_i \cap W_j = \emptyset\ \ (\,i \neq j)$$

であるとし，したがって W_i は開集合でも閉集合でもなく，むしろ境目の面が唯一つの小立方体に含まれるようにする．前の主張は開立方体，または閉立方体に対してのものだったが，開でも閉でもない立方体 W' に対しても成り立つ．なぜなら $\mathring{W}' \subset W' \subset \overline{W}'$ $\mathrm{Vol}\,(\mathring{W}') =$ $\mathrm{Vol}\,(\overline{W}')$ だからである．このような分割に対して

$$\varphi := \sum_{i=1}^k \frac{\mathrm{Vol}\,(\Phi(W_i))}{\mathrm{Vol}\,(W_i)}\chi_{W_i}$$

とおく．

$$\int_W \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}\,(\Phi(W_i))$$
$$= \mathrm{Vol}\,(\Phi(W)).$$

分割を細かくしていくことで，階段関数の列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で W 上 Δ_Φ に収束し，各 n で

$$\int_W \varphi_n(x)dx = \mathrm{Vol}\,(\Phi(W))$$

となるものを見つけることができる．補題 18.5 より，優収束定理が適用でき，補題を得る．□

定義 18.7 $U \subset \mathbb{R}^d$ を開集合，$\Phi : U \to \mathbb{R}^d$ を一対一，連続とする．$\overline{W} \subset U$ となる任意の立方体 W で

$$\mathrm{Vol}\,(\Phi(W)) = \int_W d_\Phi(x)dx$$

となるとき，Φ は密度関数 d_Φ を持つという．補題 18.6 は，有界な測度微分を持つ写像は測度微分を密度関数とするという形で述べることができる．

定理 18.8 $U, V \subset \mathbb{R}^d$ を開集合，$\Phi : U \to V$ を同相写像で密度関数 d_Φ を持つとする．$g : V \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が積分可能なとき $g(\Phi(x))d_\Phi(x)$ は U 上積分可能で

$$\int_{\Phi(U)} g(y)dy = \int_U g(\Phi(x))d_\Phi(x)dx. \tag{10}$$

証明　密度関数の定義より主張は $g \circ \Phi$ が $\overline{W} \subset U$ となる立方体 W の特性関数のときは成立する．積分の線形性より $g \circ \Phi$ が階段関数で U 内に台を持つものに対しても成り立つ．g を連続でコンパクトな台 K を V 内に持つとしよう．$\Phi^{-1}(K)$ はコンパクト集合の連続写像による像なので，コンパクトである．よって $g \circ \Phi$ は U 内にコンパクトな台を持つ．関数 $g \circ \Phi$ は U 内にコンパクトな台 K' を持つ階段関数 φ_n の一様収束極限なので，g もまた $\varphi_n \circ \Phi^{-1}$ の極限である．さらに適当な定数 c に対して，関数 $\varphi_n \cdot d_\Phi$ の絶対

値は積分可能関数 $c\chi_K \cdot d_\Phi$ によって押さえられる．優収束定理より，主張がコンパクトな台を持つ連続関数に対して確かめられる．次に $g = g^+ - g^-$ と分解することで $g \geq 0$ の場合だけ考えればよい．

$g \in H_I(\mathbb{R}^d)$ のとき g は単調増加列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ の極限である．

$$f'_n(x) := \begin{cases} f_n(x) & d(x,\partial V) \geq \frac{2}{n},\ x \in V \text{ のとき} \\ n(d(x,\partial V) - \frac{1}{n})f_n(x) & \frac{1}{n} \leq d(x,\partial V) < \frac{2}{n},\ x \in V \text{ のとき} \\ 0 & d(x,\partial V) < \frac{1}{n} \text{ または } x \notin V \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく．ここで $d(x,\partial V)$ は閉集合 ∂V から x までの距離を表す．これは連続関数である．関数 f'_n は V に含まれるコンパクトな台を持ち，単調増加して $g \cdot \chi_V$ に収束する．同様に $(f'_n \circ \Phi)d_\Phi$ は単調増加して $(g \circ \Phi)d_\Phi$ に収束する．ここで $d_\Phi \geq 0$ と仮定して一般性を失わない．

レビの単調収束定理より，主張は $g \in H_I$ に対して正しく，$g \in H_S$ に対しても同様に示せる．最後に 任意の積分可能な関数 g に対して

$$\begin{aligned}\int_{\Phi(U)} g(y)dy &= \inf\{\int_{\Phi(U)} h(y)dy, h \in H_I, h \geq g\} \\ &= \sup\{\int_{\Phi(U)} f(y)dy, f \in H_S, f \leq g\}\end{aligned}$$

が成立することに注意する．今までに見てきたことより，

$$\begin{aligned}\int_{\Phi(U)} g(y)dy &= \inf\{\int_U h(\Phi(x))d_\Phi(x)dx, h \in H_I, h \geq g\} \\ &= \sup\{\int_U f(\Phi(x))d_\Phi(x)dx, f \in H_S, f \leq g\}.\end{aligned}$$

$h \in H_I, f \in H_S$ で $f \leq g \leq h$ なので

$$f(\Phi(x))d_\Phi(x) \leq g(\Phi(x))d_\Phi(x) \leq h(\Phi(x))d_\Phi(x)$$

（ここで $d_\Phi \geq 0$ であり，また $g \geq 0$ としたことに注意）．$g(\Phi(x))d_\Phi(x)$ が U 上積分可能で(10)が成立する． □

定理 18.2 の証明証明は簡単である．補題 18.3 と補題 18.6 より，微分同相

Φ は密度関数 $d_\Phi = |\det D\Phi|$ をいたるところで持つ．定理 18.8 より U 上 $(f\circ\Phi)|\det D\Phi|$ が積分可能であることが，$f: V \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ の積分可能性と対応する積分公式よりわかる．もう一方の方向は Φ^{-1} が微分同相で密度関数 $d_{\Phi^{-1}} = |\det D(\Phi^{-1})| = |\det D\Phi|^{-1}\circ\Phi^{-1}$ を持つことより，同様に示せる．よって $g = (f\circ\Phi)|\det D\Phi|$ が積分可能であれば $(g\circ\Phi^{-1})|\det D(\Phi^{-1})| = f$ が定理 18.8 と積分公式よりでる． □

例　極座標への変換公式を導く．まず平面の場合．

写像

$$\Phi: \{(r,\varphi): r\geq 0, \varphi\in\mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2$$
$$(r,\varphi)\mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ \text{（複素座標で書くと } (r,\varphi)\mapsto re^{i\varphi}\text{）}$$

を考える．微分

$$D\Phi = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}$$

なので，特に

$$\det D\Phi = r \tag{11}$$

を得る．

これより，逆関数定理と併せて Φ は $r>0$ のとき局所的に可逆であることがわかる．しかし Φ は大域的に可逆でない．なぜなら $k\in\mathbb{Z}$ に対して $\Phi(r,\varphi+2\pi k) = \Phi(r,\varphi)$．$\Phi$ が一対一であるためには，定義域を

$$\{(r,\varphi): r>0, 0\leq\varphi<2\pi\}$$

に制限しなくてはいけない．この場合像は $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ である．

定理 18.2 より

系 18.9　$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ は関数

$$(r,\varphi)\mapsto r\,f(\Phi(r,\varphi))$$

が $\{(r,\varphi): r\geq 0, 0\leq\varphi\leq 2\pi\}$ で積分可能なとき，またそのときに限り積分可能であり，この場合

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi \tag{12}$$

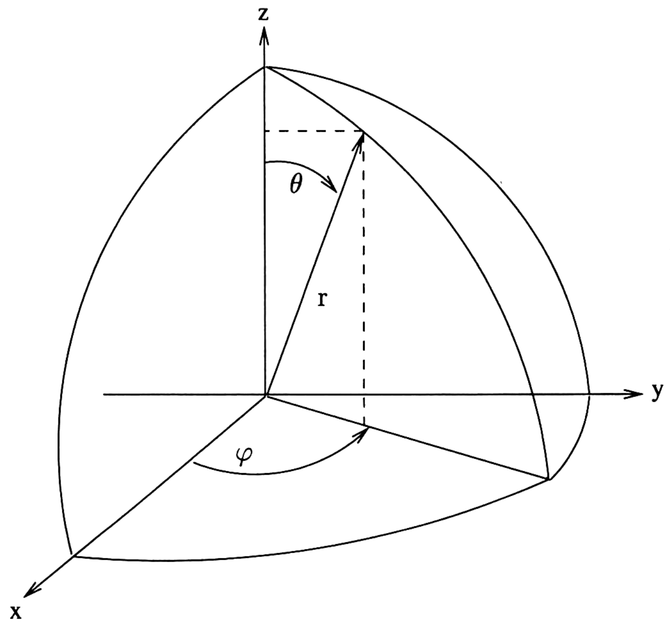
を得る.

証明 定理 18.2 で

$$U := \{(r,\varphi) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

$V := \Phi(U) = \mathbb{R}^2\backslash\{(x,0) : x \geq 0\}$ とおく. Φ は定理18.2 で要請されているように開集合 U と V の間の微分同相である. 補集合 $\mathbb{R}^2\backslash V$ と $\{r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \setminus \{r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$ は零集合なので, 結果は定理 18.2 より従う. □

同様に空間の極座標を写像



$$\Psi : \{(r,\theta,\varphi) : r \geq 0, \theta, \varphi \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$$
$$(r,\theta,\varphi) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

で定義する.

$$D\Psi = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det D\Psi = r^2\sin\theta.$$

ここでも Ψ は大域的に可逆ではない．$\Psi(r,\theta,\varphi+2\pi k) = \Psi(r,\theta,\varphi)$ が $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\Psi(r,\theta+\pi,\varphi) = \Psi(r,\pi-\theta,\varphi+\pi)$ が成立する．写像 Ψ は $\{(r,\theta,\varphi) : r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 \le \varphi < 2\pi\}$ 上一対一で，$\{(r,\theta,\varphi) : r \ge 0, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi\}$ 上，上への写像である．

系 18.9 より，

系 18.10 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ は関数

$$(r,\theta,\varphi) \mapsto r^2\sin\theta f(\Psi(r,\theta,\varphi))$$

が $\{r \ge 0, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ 上積分可能なとき，またそのときに限り積分可能であり，このとき

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} f(\Psi(r,\theta,\varphi))r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi. \tag{13}$$

公式(12)，(13) よりそれぞれ $d = 2$，$d = 3$ の場合の回転対称な関数に関する公式を再び得る．

18 章の演習

1) 定理 18.2 の証明を f が連続でコンパクトな台を持つ場合に簡略化せよ．

2) $\mathbb{R}^3$ の円柱座標

$$(r,\varphi,z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

に関する変換公式を求めよ．

第 V 部

L^p 空間とソボレフ空間

第19章

L^p 空間

［ L^p 空間を絶対値の p 乗が可積分な関数のなす空間として定義する．ミンコフスキー(Minkowski)，ヘルダー(Hölder)の不等式を示し，L^p 空間がバナッハ空間であることを見る．また，L^p 関数が滑らかな関数で近似できることを学ぶ．これらの軟化子は1の分割の存在を示すときにも用いられる．］

零集合を除いて一致する二つの関数は同値であるというのであった(15章を見よ)．積分を考えている限り，関数が同値であるということは，すべての積分が一致することだと考えてよい．

定義 19.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^c$ を開集合，$p \geq 1\,(p \in \mathbb{R})$ とする．$L^p(\Omega)$ を可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ で，$|f|^p$ が Ω 上可積分であるものの同値類の集合とする．$f \in L^p(\Omega)$ のとき

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

とおく

記号についての注　ベクトル値関数 $F = (f^1, \ldots, f^d) : \Omega \to (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^d$ もときには考える必要がある．$\mathbb{R}^d$ のユークリッドノルムを $\|\cdot\|$ と書くかわりにときには $|\cdot|$ と書き

$$\|F\|_{L^p(\Omega)} := \Big(\sum_{i=1}^{d} \|f^i\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

とする．

明らかに $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ は f の同値類のみによって決まり，

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \geq 0\ (\forall f) \tag{1}$$

であり，また

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0 \iff f \text{ は零関数} \tag{2}$$

である．このように $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ は同値類の集合上正定値である．以下，実際には可測関数のある同値類というかわりに，簡単のためにしばしば単に可測関数という．可測関数の同値類に各点ごとに成り立つ性質を課すときには，その性質を持つ関数が同値類のなかに存在するという意味である．例えば $f \equiv 0$ と書いたら，f は零関数という意味である．

定義 19.2 可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} f(x) := \inf\{\, a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} : \text{ ほとんどすべての } x \in \Omega \text{ で } f(x) \le a \,\}$$

とおき，同様に

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} f(x) := \sup\{\, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} : \text{ ほとんどすべての } x \in \Omega \text{ で } a \le f(x) \,\}$$

とおく（それぞれ本質的上限，本質的下限という）．

$L^\infty(\Omega)$ を可測関数で

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty$$

となるもの（の同値類）の空間とする．上と同様に，

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \ge 0 \tag{3}$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = 0 \iff f \equiv 0 \text{ （つまり } f \text{ は零関数）} \tag{4}$$

である．

例　例として，関数

$$f(x) = \|x\|^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

と領域 $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$，$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| > 1\}$ を考える．明らかに

$$f \in L^\infty(\Omega_1) \iff \alpha \ge 0,$$

$$f \in L^\infty(\Omega_2) \iff \alpha \le 0.$$

どのような f が L^p 空間に属するかを知るには，$\Omega = \Omega_1$，Ω_2 それぞれの場合に，積分

$$\int_{\Omega} \|x\|^{\alpha p} dx$$

が存在するかどうかを調べておく必要がある．

定理 13.21 より，$r = \|x\|$ とおくと

$$\int_{\Omega_1} \|x\|^{\alpha p} dx = d\omega_d \int_0^1 r^{\alpha p} \cdot r^{d-1} dr = d\omega_d \int_0^1 r^{\alpha p + d - 1} dr$$

であり，この積分が存在するのは $\alpha p + d > 0$ のとき，またそのときに限る．

よって

$$f \in L^p(\Omega_1) \iff \alpha p + d > 0.$$

同様に

$$\int_{\Omega_2} \|x\|^{\alpha p} dx = d\omega_d \int_1^{\infty} r^{\alpha p + d - 1} dr$$

なので

$$f \in L^p(\Omega_2) \iff \alpha p + d < 0.$$

□

L^p 空間について学ぶ．

$1 \leq p \leq \infty, \lambda \in \mathbb{R}, f \in L^p(\Omega)$ に対して

$$\|\lambda f\|_{L^p(\Omega)} = |\lambda| \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

よって $f, \lambda f$ もまた $L^p(\Omega)$ に属する．$\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ がノルムになっていることを見る．そのためには三角不等式を確かめればよい．$p = \infty$ の場合は明らか．実際

$$\|f + g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{5}$$

である．$p = 1$ の場合も同様(積分の単調性より)

$$\|f + g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\Omega)}. \tag{6}$$

$1 < p < \infty$ の場合には，若干の準備が必要である．これ以降，混乱の恐れがない場合には $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ と書くかわりに，単に $\|\cdot\|_p$ と書くことにする．

まず，次のヤング(Young)の不等式を思い出しておこう．

補題 19.3 $a, b \geq 0, p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ に対して

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{7}$$

これを用いてヘルダー(Hölder)の不等式を証明する．

定理 19.4 $p, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする($p = 1$ の場合は $q = \infty$ とする)．$f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ のとき $fg \in L^1(\Omega)$ であり

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \tag{8}$$

が成り立つ．

証明　まず系 17.13 より f，g，$f \cdot g$ は可測である．

$p = 1$ で $q = \infty$ の場合は

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |g(x)| \int_\Omega |f(x)|dx$$

$$= \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1.$$

次に $p, q > 1$ の場合を考える．まず $f = 0$ または $g = 0$ であれば主張は明らかに成立する．

さらに，不等式(8)は斉次であること，つまり，もし f，g で(8)が成立すれば $\lambda f, \mu g$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ に対しても(8)が成立することに注意する．したがって

$$\|f\|_p = 1 = \|g\|_q \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx = 1 = \int_\Omega |g(x)|^q dx \right) \tag{9}$$

と仮定してよい．ヤングの不等式(補題 19.3)より

$$|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}$$

を得，(9)より

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

$L^p(\Omega)$ における三角不等式を示す．この場合の三角不等式はミンコフスキー(Minkowski)の不等式とも呼ばれる．

系 19.5 $1 \le p \le \infty$, $f, g \in L^p(\Omega)$ とする．このとき $f+g \in L^p(\Omega)$ で

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

証明 $p = 1, \infty$ の場合はすでに示したので，$1 < p < \infty$，$q = \frac{p}{p-1}$ とおく．$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ であり，$\eta := |f+g|^{p-1}$ とおくと $\eta^q = |f+g|^p$ であり，$f, g \in L^p(\Omega)$ のとき $f+g$ もまた $L^p(\Omega)$ に属することは明らかである．したがって $\eta \in L^q(\Omega)$ であり，

$$\|\eta\|_q = \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

さらに

$$|f+g|^p = |f+g|\eta \le |f\eta| + |g\eta|. \tag{10}$$

よってヘルダーの不等式より (10) を積分することで

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &\le \|f\eta\|_1 + \|g\eta\|_1 \\ &\le (\|f\|_p + \|g\|_p)\|\eta\|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}\end{aligned}$$

を得，したがって

$$\|f+g\|_p = \|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

以上の考察をまとめると

系 19.6 $1 \le p \le \infty$ に対して $L^p(\Omega)$ はベクトル空間で，$\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ は $L^p(\Omega)$ のノルムである． □

後のため定理 19.4 を以下のように一般化しておく．これは帰納法で簡単に確かめられる．

$p_1,\ldots,p_n \geq 1, \frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_n}=1$, $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ $(i=1,\ldots,n)$ とすると,

$$\int_\Omega |f_1(x)\ldots f_n(x)|dx \leq \|f_1\|_{p_1}\ldots\|f_n\|_{p_n}. \tag{11}$$

以下もヘルダーの不等式から得られる結果である.

系 19.7 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合, $\mathrm{Vol}\,(\Omega) < \infty, 1 \leq p \leq q \leq \infty$ とする. $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ であり, $f \in L^q(\Omega)$ に対して

$$\mathrm{Vol}\,(\Omega)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \mathrm{Vol}\,(\Omega)^{-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

証明

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |f(x)|^p dx = \int_\Omega 1\cdot|f(x)|^p dx \\ &\leq \||f|^p\|_{L^{\frac{q}{p}}(\Omega)}\cdot\|1\|_{L^{\frac{q}{q-p}}(\Omega)} \\ &\left(\frac{p}{q}+\frac{q-p}{q}=1\right)\ (\text{定理 19.4 より}) \\ &= \|f\|^p_{L^q(\Omega)}\,\mathrm{Vol}\,(\Omega)^{1-\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

これより結果を得る. □

系 19.8 $1 \leq p \leq q \leq r, \frac{1}{q}=\frac{\lambda}{p}+\frac{(1-\lambda)}{r}$ とする $(0 \leq \lambda \leq 1)$. $f \in L^p(\Omega)\cap L^r(\Omega)$ のとき $f \in L^q(\Omega)$ であり

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda\cdot\|f\|_r^{1-\lambda}.$$

証明 $\int_\Omega |f(x)|^q dx = \int_\Omega |f(x)|^{\lambda q}\cdot|f(x)|^{(1-\lambda)q}dx$ である. $p_1=\frac{p}{\lambda q}, p_2=\frac{r}{(1-\lambda)q}$ とおくと, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1$. よって定理 19.4 より

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)|^q dx &\leq \||f|^{\lambda q}\|_{p_1}\cdot\||f|^{(1-\lambda)q}\|_{p_2} \\ &= \|f\|_p^{\lambda q}\cdot\|f\|_r^{(1-\lambda)q}.\end{aligned}$$

□

系 19.9 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合, $\mathrm{Vol}\,(\Omega) < \infty$ とする. $f \in L^p(\Omega)(1 \leq p < \infty)$

に対して $\Phi_p(f) := (\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(\Omega)}\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ とおく．$|f|^p$ が可測であるが可積分でないとき $\Phi_p(f) = \infty$ とおく．任意の可測関数 $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対して

$$\lim_{p\to\infty} \Phi_p(f) = \operatorname*{ess\ sup}_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

証明　$f \in L^p(\Omega)$ に対して

$$\Phi_p(f) = \mathrm{Vol}\,(\Omega)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

系 19.7 より，$\Phi_p(f)$ は p に関して単調増加であり，$1 \le p < \infty$ に対して

$$\Phi_p(f) \le \operatorname*{ess\ sup}_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

これより $\lim_{p\to\infty} \Phi_p(f)$ が存在し $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に属する．後は

$$\operatorname*{ess\ sup}_{x\in\Omega} |f(x)| \le \lim_{p\to\infty} \Phi_p(f)$$

を示せばよい．$K \in \mathbb{R}$ に対して

$$A_K := \{x \in \Omega : |f(x)| \ge K\}.$$

f が可測なので A_K も可測（定理 17.11 を見よ）．

さらに，$K < \operatorname*{ess\ sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$ に対して

$$\mathrm{Vol}\,(A_K) > 0.$$

また $x \in A_K$ で $|f(x)| \ge K$ なので

$$\Phi_p(f) \ge \mathrm{Vol}\,(\Omega)^{-\frac{1}{p}} (\int_{A_K} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \ge \mathrm{Vol}\,(\Omega)^{-\frac{1}{p}}\ \mathrm{Vol}\,(A_K)^{\frac{1}{p}} \cdot K.$$

$\mathrm{Vol}\,(A_K) > 0$ より，

$$\lim_{p\to\infty} \Phi_p(f) \ge K.$$

これがすべての $K < \operatorname*{ess\ sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$ で成立するので

$$\lim \Phi_p(f) \ge \operatorname*{ess\ sup}_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

これで系の証明が完結した．　□

次に $L^p(\Omega)$ がバナッハ空間であることを示す．これを理解するために，まずここで使う相異なる収束の概念を比較する．まず，ほとんどいたるところで各点収束するという収束がある．次に L^∞-収束：

$$f_n \xrightarrow{L^\infty} f \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

明らかに L^∞-収束すればほとんどいたるところで各点収束する．最後に $1 \leq p < \infty$ に対して L^p-収束という概念がある．

$$f_n \xrightarrow{L^p} f \iff \|f_n - f\|_p \to 0.$$

この収束を強収束ともいう (後で弱収束という別の収束概念を導入する)．$p = 2$ のとき平均二乗収束ともいう．次に挙げる二つの例は $1 \leq p < \infty$ に対して各点収束することが必ずしも L^p-収束を意味しないし，また L^p-収束が必ずしも各点収束を意味しないことを示している．

例　1） この例は収束定理のときにすでに学んだものである．$f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) := \begin{cases} n & (0 < x \leq \frac{1}{n}) \\ 0 & (\frac{1}{n} < x < 1) \end{cases}$$

で定義する．f_n は各点ごとに 0 に収束するが

$$\|f_n\|_{L^p} = \begin{cases} n^{\frac{p-1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ n & p = \infty. \end{cases}$$

よって

$$\|f_n\| \to \infty \ \ (n \to \infty, \quad p > 1).$$

$p = 1$ のとき，すべての n で $\|f_n\| = 1$ であるが $f \in L^1(\Omega)$ で

$$\|f_n - f\|_1 \to 0 \tag{12}$$

となるものはない．なぜなら $x > \frac{1}{n}$ で $f_n(x) = 0$ なので f は 0 と等しくなくてはならないが，もしそうであれば $\|f_n\| = 1$ なので (12) は成立しない．

上の例以外にも

$$g_n(x) := \begin{cases} n^2 & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とおくと $\|g_n\|_1 \to \infty$ $(n \to \infty)$.

2) 以下の列を考える.

$$\chi_{[0,1]}, \chi_{[0,\frac{1}{2}]}, \chi_{[\frac{1}{2},1]}, \chi_{[0,\frac{1}{4}]}, \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}, \cdots$$

$n \in \mathbb{N}$ に対して k を

$$2^k \le n < 2^{k+1}$$

で唯一つに決まる自然数とし

$$I_n := [n2^{-k} - 1, (n+1)2^{-k} - 1]$$

とおく．このとき

$$f_n = \chi_{I_n}$$

は，$1 \le p < \infty$ に対して

$$\|f_n\|_p = 2^{-\frac{k}{p}}.$$

したがって $\|f_n\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$. しかし $f_n(x)$ は，いかなる $x \in (0,1)$ に対しても収束しない．なぜなら任意の x に対して無限個の $m \in \mathbb{N}$ で $f_m(x) = 1$，無限個の $\ell \in \mathbb{N}$ で $f_\ell(x) = 0$ となる.

次に以下を証明する.

補題 19.10 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega), 1 \le p < \infty$ で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p =: M < \infty$$

とする．このとき Σf_n は L^p で収束し，またほとんどいたるところで，ある $h \in L^p(\Omega)$ に各点収束する.

証明

$$g_n := \sum_{j=1}^{n} |f_j|$$

とおく．$(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ は単調増加で非負であり，$\|g_n\|_p \le \sum_{j=1}^n \|f_j\|_p$ (系 19.5) より $\|g_n\|_p \le M$ を得，よって $\int_\Omega (g_n(x))^p dx \le M^p$．単調収束定理(定理 16.1) より $(g_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ はほとんどいたるところで

$$\int_\Omega k(x)dx \le M^p$$

となるようなある k に各点収束する．これは $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がある非負可測関数 g で $g^p = k$ となるものに収束することを意味し，よって $g \in L^p(\Omega)$ で $\|g\|_p \le M$.

列 Σf_n は絶対収束(ほとんどいたるところ)なので Σf_n はほとんどいたるところ各点である関数 h で $|h| \le g$ となるものに収束する．定理 17.3 (iii) より，h は可測で，$h \in L^p(\Omega)$ で

$$\|h\|_p \le M.$$

したがって $\sum_{j=1}^n f_j - h$ はほとんどいたるところ 0 に各点収束し，さらに

$$|\sum_{j=1}^n f_j - h| \le 2|g|$$

なので優収束定理より

$$\|\sum_{j=1}^n f_j - h\|_p \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

これにより L^p-収束が確かめられた．　□

定理 19.11　$1 \le p \le \infty$ で $L^p(\Omega)$ はバナッハ空間である．

証明　まず $1 \le p < \infty$ とする．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ をコーシー列とすると，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対してある $N(k) \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\|f_n - f_{N(k)}\|_p < 2^{-k} \ \ (n \ge N(k)). \tag{13}$$

一般性を失わずに $N(k) < N(k+1)$ と仮定してよい．列

$$\|f_{N(1)}\|_p + \|f_{N(2)} - f_{N(1)}\|_p + \|f_{N(3)} - f_{N(2)}\|_p + \cdots$$

は収束する．これは幾何級数の収束性からわかる．補題 19.10 より列

$$f_{N(1)} + (f_{N(2)} - f_{N(1)}) + (f_{N(3)} - f_{N(2)}) + \cdots \tag{14}$$

はある $f \in L^p(\Omega)$ に収束し，ほとんどいたるところ各点収束するだけでなく L^p-ノルムに関しても収束する．L^p-収束は

$$\|f_{N(k)} - f\|_p \to 0 \quad (k \to \infty)$$

を意味する．$\varepsilon > 0$ に対して，k を十分大で

$$\|f_{N(k)} - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \tag{15}$$

$$2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{16}$$

となるものとする．$n \geq N(k)$ に対して

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{N(k)}\| + \|f_{N(k)} - f\| < \varepsilon$$

((13), (15), (16) より)．よって f_n は L^p-ノルムに関して f に収束する．

$p < \infty$ の場合を扱った．$p = \infty$ の場合を証明する前に，(14) の収束はほとんどいたるところ各点収束するという事実より従う結果を記しておく．

定理 19.12 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が f に L^p で収束するとき，ほとんどいたるところで f に各点収束する (f_n) の部分列が存在する．

定理 19.11 を $p = \infty$ の場合証明しよう．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $L^\infty(\Omega)$ のコーシー列とする．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，ある $N(k) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k} \quad (n, m \geq N(k)).$$

$n, m \geq N(k)$ となる組 (n, m) に対して $A_{nm,k}$ を

$$|f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{k}$$

となる $x \in \Omega$ のなす零集合とする．$A := \bigcup_{\substack{k\geq 1 \\ n,m\geq N(k)}} A_{nm,k}$ もまた零集合である（補題 15.3）．$\Omega\backslash A$ 上 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は f に一様に収束する．なぜなら $n, m \geq N(k)$ に対して

$$\sup_{x\in\Omega\backslash A} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k} \tag{17}$$

で，したがって $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\Omega\backslash A$ の各点ごとにコーシー列である．A は零集

合なので f_n は Ω 上ほとんどいたるところ各点で f に収束し，よって f は定理 17.3 (iii) より可測である．特に $n \geq N(k)$ で

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\Omega\setminus A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$$

であることが，(17) で $m \to \infty$ とすることでわかる．これで f_n が f に $L^\infty(\Omega)$ で収束することが示せた．　□

次に滑らかな関数による L^p 関数の近似を学ぶ．このために $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ を非負関数で台が $\mathbb{R}^d$ の単位球体に入るものとする．

$$\rho(x) \geq 0 \ (\forall\, x \in \mathbb{R}^d),$$
$$\rho(x) = 0 \ (\ \|x\| \geq 1).$$

さらに

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1. \tag{18}$$

$f \in L^1(\Omega)$ とする．f の正則化(パラメーター h の)を合成積

$$f_h(x) := \frac{1}{h^d}\int_\Omega \rho(\frac{x-y}{h})f(y)dy \quad \left(x \in \Omega, h < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\right)$$

で定義する．以下 $A \Subset \Omega$ で A は有界でその閉包が Ω に含まれることを表すことにする．

定理 19.13 $f \in C^0(\Omega)$ のとき，任意の $\Omega' \Subset \Omega$ 上 $h \to 0$ で $f_h \to f$ に一様に収束する．

証明

$$f_h(x) = \frac{1}{h^d}\int_{|x-y|\leq h} \rho(\frac{x-y}{h})f(y)dy = \int_{|z|\leq 1} \rho(z)f(x-hz)dz$$
$$(z = \frac{x-y}{h} とおく)$$

である．$\Omega' \Subset \Omega$, $h < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ のとき，

$$\sup_{x\in\Omega'} |f(x) - f_h(x)| = \sup_{x\in\Omega'} \left|\int_{|z|\leq 1} \rho(z)(f(x) - f(x-hz))dz\right|,$$
$$\left((18) より \int_{|z|<1} \rho(z)f(x)dz = f(x)\right)$$

$$\leq \sup_{x\in\Omega'} \int_{|z|\leq 1} \rho(z)|f(x)-f(x-hz)|dz$$

$$\leq \sup_{x\in\Omega'} \sup_{|z|\leq 1} |f(x)-f(x-hz)|, \text{(再び(18)より)}.$$

f はコンパクト集合

$$\{x : \mathrm{dist}\,(x,\Omega') \leq h\} \subset \Omega \quad (h\text{ の選び方より})$$

上一様連続なので，$h \to 0$ で上式は 0 に近づく． □

補題 19.14（L^p 関数の近似） 任意の $f \in L^p(\Omega)$，$1 \leq p < \infty$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ が存在して $\|f-\varphi\|_p < \varepsilon$ が成り立つ．

証明 $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$ で値ゼロをとるとして f を $\mathbb{R}^d$ に拡張しておく．$f \geq 0$ の場合を考えれば十分である．$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_n(x) := \begin{cases} \min(f(x), n) & \|x\| \leq n \\ 0 & \|x\| > n \end{cases}$$

とおく．すべての $n \in \mathbb{N}$ で $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$．$|f_n - f|^p \leq |f|^p$ なので優収束定理より

$$f_n \xrightarrow{L^p} f \ (n \to \infty).$$

したがって $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19}$$

さらに定理 14.8 より，ある $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ が存在して

$$\|f_n - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon^p}{2^p n^{p-1}}. \tag{20}$$

$0 \leq f_n \leq n$ なので，必要であれば φ を $\mathrm{med}\,(0,\varphi,n)$ と取り替えることで $0 \leq \varphi \leq n$ と仮定してしてよい．$|f_n - \varphi| \leq n$ であり，よって

$$|f_n - \varphi|^p \leq n^{p-1}|f_n - \varphi|.$$

これより (20) と併せて

$$\|f_n - \varphi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \|f_n - \varphi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq n^{p-1}\|f_n - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} < (\frac{\varepsilon}{2})^p. \tag{21}$$

(19)，(20) より

$$\|f - \varphi\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

□

補題 19.15 任意の $f \in L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$ に対して，Ω 上ほとんど至るところ f に収束する関数列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_c(\mathbb{R}^d)$ が存在する．

証明 補題 19.14 より，f に $L^p(\Omega)$ で収束するような $C_c(\mathbb{R}^d)$ の関数列が存在する．

定理 19.12 より，この列の部分列で f にほとんど至るところ収束するものが取れることが分かる．□

次に以下を証明する．

定理 19.16 $f \in L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$ とすると，f_h は，$h \to 0$ で f に $L^p(\Omega)$ で収束し，かつ Ω のほとんど至るところ各点収束する．

（ここで f は $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$ でゼロの値を取るように Ω 上に拡張することで，f_h を Ω 上すべてで定義する）．

ほとんど至るところ各点収束するためには，$f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$，即ち Ω 上局所可積分性で十分である．

証明 再び

$$\begin{aligned}
f_h(x) &= \int_{|z|\leq 1} \rho(z) f(x-hz)dz \\
&= \int_{|z|\leq 1} (\rho(z)^{1-\frac{1}{p}})(\rho(z)^{\frac{1}{p}} f(x-hz))dz \\
&\leq (\int_{|z|\leq 1} \rho(z)dz)^{1-\frac{1}{p}} (\int_{|z|\leq 1} \rho(z)|f(x-hz)|^p dz)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \text{（ヘルダーの不等式より）} \\
&= (\int_{|z|\leq 1} \rho(z)|f(x-hz)|^p dz)^{\frac{1}{p}} \quad \text{（(18) より）}.
\end{aligned}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f_h(x)|^p dx &\le \int_{\Omega} \int_{|z|\le 1} \rho(z)|f(x-hz)|^p dz dx \\
&= \int_{|z|\le 1} \rho(z)\Big(\int_{\Omega} |f(x-hz)|^p dx\Big) dz \text{（フビニの定理より）} \\
&\le \int_{|z|\le 1} \rho(z)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p dy\Big) dz = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p dy \text{（(18) より）} \\
&= \int_{\Omega} |f(y)|^p dy.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$\varepsilon > 0$ とする．十分大きな n をとって，系 16.8 を使うと

$$
\int_{\Omega\cap\{x\in\mathbb{R}^d:\|x\|\ge n\}} |f(x) - f_h(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4} \tag{23}
$$

（例えば(22)より，n は h によらない）．

補題 19.14 より $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ を

$$
\|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{4} \tag{24}
$$

となるようにとれる．定理 19.13 より，十分小さい h に対して

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi - \varphi_h\|_{L^p(\Omega\cap\{x\in\mathbb{R}^d:\|x\|\le n\})} \\
&\le (\ \mathrm{Vol}\ (\Omega \cap \{\|x\| \le n\})^{\frac{1}{p}} \Big(\sup_{x\in\Omega,\|x\|\le n} |\varphi(x) - \varphi_h(x)|\Big) < \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

(22)を f でなく $f - \varphi$ に適用し

$$
\begin{aligned}
\|f - f_h\|_{L^p(\Omega)} &\le \|f - f_h\|_{L^p(\Omega\cap\{x\in\mathbb{R}^d:\|x\|\le n\})} \\
&\quad + \|f - f_h\|_{L^p(\Omega\cap\{x\in\mathbb{R}^d:\|x\|\ge n\})} \\
&\le \|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\varphi - \varphi_h\|_{L^p(\Omega\cap\{x\in\mathbb{R}^d:\|x\|\le n\})} \\
&\quad + \|\varphi_h - f_h\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \frac{\varepsilon}{4} \text{（(23) より）} \\
&< \varepsilon \text{（(22), (24), (25) より）}
\end{aligned}
$$

を得る．

これで L^p 収束性は示せた．次にほとんど至るところ各点収束を示す．

結果は局所的なので，与えられた点 x のまわりの Ω の部分領域で，その領域上 f が可積分となる領域をとれば良いので、単に f は L^1 級であると仮定

してよい．

補題 19.15 より，連続関数の列 φ_n で f に L^1 で収束し，更にほとんど至るところ各点で収束するものが取れる．

このとき

$$|f_h(x)-f(x)| \le \frac{1}{h^d}\int_{B(x,h)} \rho(\frac{x-y}{h})|f(y)-\varphi_n(y)|dy + \frac{1}{h^d}\int_{B(x,h)} \rho(\frac{x-y}{h})|\varphi_n(y)-f(x)|dy$$

を得る．

φ_n は連続なので，定理 19.13 により最後の項は $h\to 0$ で $|\varphi_h(x)-f(x)|$ に収束する． $x\in\Omega$ を $\varphi_n(x)$ が $f(x)$ に収束するような点とする．与えられた $\varepsilon>0$ に対して $n_0\in\mathbb{N}$ と $h_0>0$ が存在して，$n\ge n_0$, $0<h\le h_0$ に対して

$$\frac{1}{h^d}\int_{B(x,h)} \rho(\frac{x-y}{h})|\varphi_n(y)-f(x)|dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する．更に，φ_n は f に $L^1(\Omega)$ で収束するので，任意の $h>0$ に対して，$n_1\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\ge n_1$ に対して

$$\frac{1}{\omega_d h^d}\int |f(y)-\varphi_n(y)|dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる．よって $\varphi_n(x)$ が $f(x)$ に収束するすべての点において

$$|f_h(x)-f(x)| < \varepsilon$$

が十分小さい h に対して成り立つ．$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の選び方より，これがほとんどすべての点 $x\in\Omega$ で成立するので，$h\to 0$ のとき，f_h が f にほとんど至るところ収束することが示せた．　□

核関数を特別なものを選んで，ここまでの結果を適用してみよう．まず，最初の例は

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_d}, & x\in B(0,1), \\ 0, & \text{それ以外}, \end{cases}$$

である．但し，ここで ω_d は球体 $B(0,1)\subset\mathbb{R}^d$ の体積であり，(18) を満たすように選んでいる． $f\in L^1(\Omega)$ との合成積は，$B(x,h)\subset\Omega$ であれば，単に

平均

$$f_h(x) = \frac{1}{\omega_d h^d} \int\limits_{B(x,h)} f(y)dy,$$

になる.

定義 19.17 $x \in \Omega$ が $f \in L^1(\Omega)$ のルベーグ点であるとは,

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\omega_d h^d} \int\limits_{B(x,h)} f(y)dy, \quad (h < \mathrm{dist}\ (x, \partial\Omega))$$

が成り立つこと，つまり球体 $B(x,h)$ 上の f の平均が $h \to 0$ で f の x における値に収束するということで定義する.

系 19.18 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ とすると，ほとんどすべての点 $x \in \Omega$ は f のルベーグ点である.

証明 定理 19.16 を核関数が ρ_0 の場合に適用すれば良い. □

次に核関数

$$\rho_1(x) := \begin{cases} c\ \exp(\frac{1}{\|x\|^2-1}), & \|x\| < 1\ \text{の場合} \\ 0, & \|x\| \geq 1\ \text{の場合} \end{cases}$$

を考える．但し定数 $c > 0$ は(18)が成立するように選ぶ.

核関数 ρ_0 と異なり，ρ_1 は $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 関数である.

この滑らかな核関数 ρ_1 との合成積 f_h

$$f_h(x) = \frac{1}{h^d} \int\limits_\Omega \rho_1(\frac{x-y}{h}) f(y)dy, \quad (x \in \Omega,\ h < \mathrm{dist}\ (x, \partial\Omega))$$

を考える.

補題 19.19 $\Omega' \Subset \Omega$, $h <$ dist $(\Omega', \partial\Omega)$ とすると

$$f_h \in C^\infty(\Omega').$$

証明 $\rho_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ であり，k 階偏微分を簡単に D^k で表すと，定数 c_k が存在して $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D^k \rho_1(x)| \leq c_k$ を満たすので，これは定理 16.10 からの直截な帰結である. □

定義 19.20 $k = 0, 1, 2, 3, \ldots \infty$ に対して

$$C_0^k(\Omega) := \{ f \in C^k(\Omega) : \mathrm{supp} f \Subset \Omega \}$$

と定義する．

系 19.21 $C_0^\infty(\Omega)$ は $1 \le p < \infty$ で $L^p(\Omega)$ の稠密部分集合．

証明　主張は $f \in L^p(\Omega)$，$\varepsilon > 0$ に対して $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在して

$$\|f - \varphi\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$$

となることを意味している．まず $\Omega' \Subset \Omega$ を $\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \overline{\Omega}')} < \frac{\varepsilon}{3}$ となるようにとる．（系 16.8 を見よ．）

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in \overline{\Omega}', \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}'. \end{cases}$$

定理 19.16 より，ある $h <$ dist $(\Omega', \partial\Omega)$ が存在して

$$\|\tilde{f} - \tilde{f}_h\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}'$ で $\tilde{f}(x) = 0$ なので，特に

$$\|\tilde{f}_h\|_{L^p(\Omega \setminus \overline{\Omega}')} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

これより

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{f}_h\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \overline{\Omega}')} + \|\tilde{f}_h\|_{L^p(\Omega \setminus \overline{\Omega}')} \\ + \|\tilde{f} - \tilde{f}_h\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon. \end{aligned}$$

補題 19.19 より $\tilde{f}_h \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, また h の選び方より $\tilde{f}_h$ は Ω 内にコンパクトな台を持つ．　□

系 19.22 $f \in L^2(\Omega)$ とする．すべての $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ で，

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$$

であれば $f \equiv 0$.

証明　系 19.21 より，列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ が存在して $\|f - \varphi_n\|_2 \to 0$, つまり

$$\int_\Omega (f(x) - \varphi_n(x))^2 dx \to 0 \ (n \to \infty). \tag{26}$$

ヘルダーの不等式より

$$\int_\Omega f^2(x)dx - \int_\Omega f(x)\varphi_n(x)dx \le \Big(\int_\Omega f^2(x)dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega (f(x)-\varphi_n(x))^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

(26) より

$$\int_\Omega f^2(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x)\varphi_n(x)dx = 0$$

となる．

したがって $\|f\|_2 = 0$ であり，よって $f \equiv 0$. □

系 19.23 $f \in C^0(\Omega)$ は，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$$

となるとする．このとき $f \equiv 0$.

証明 任意の $\Omega' \Subset \Omega$ で $f_{|\Omega'} \in L^2(\Omega')$, 前出の系より $f_{|\Omega'} \equiv 0$. よって $f \equiv 0$.□

最後に，この節で導入した正規化の方法を用いて，いわゆる「1 の分割」の存在を示そう．

定理 19.24 Ω を $\mathbb{R}^d$ の開集合で，開集合の族 $\{U_i\}_{i\in I}$ によって被覆されている，即ち $\Omega = \bigcup_{i\in I} U_i$ とする．このとき被覆に従属する 1 の分割が存在する．すなわち可算個の $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 級関数の系 $\{\phi_j\}_{j\in J}$ が存在して，

(i) 各 $j \in J$ に対して，ある $i \in I$ が存在して $\mathrm{supp}\phi_j \subset U_i$

(ii) すべての $j \in J$, すべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $0 \le \phi_j(x) \le 1$

(iii) すべての $x \in \Omega$ で $\sum_{j\in J}\phi_j(x) = 1$

(iv) 各コンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対して，K 上恒等的にゼロにならない ϕ_j は高々有限個

を満たす．

証明 任意の開球体 $U(y,r)$ $(y \in \mathbb{R}^d,\ r > 0)$ に対して，ρ_1 を平行移動かつスケール変換して，$\rho_{y,r}$ を

$$\rho_{y,r}\begin{cases} > 0 & (x \in U(y,r)) \\ = 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

となるように定める．$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$K_n := \{x \in \Omega : \|x\| \leq n,\ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}\},\ K_0 := K_{-1} := \emptyset$$

と置く．任意の n に対して K_n はコンパクト集合で，$K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$，更に

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

である．

$$\Omega_n := \overset{\circ}{K}_{n+1} \setminus K_{n-2},\ A_n := K_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1}$$

と置く．すべての n で A_n はコンパクト，Ω_n は開集合，$A_n \subset \Omega_n$ で，かつ

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

である．Ω の任意のコンパクト集合は，適当な K_n に含まれ，従って高々有限個の Ω_n 達としか交わらない．勝手な $x \in A_n$ に対して，開球体で $U(x,r) \subset \Omega_n$ かつ，適当な $i \in I$ に対して $U(x,r) \subset U_i$ となるものがある．A_n はコンパクトなので，このような有限個の開球体で被覆することができる．それらを

$$U(x_\nu^n, r_\nu^n), \nu = 1, \ldots, k_n$$

とおく．任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ はこれらの球体 $U(x_\nu^n, r_\nu^n)$ $(n \in \mathbb{N}, \nu = 1, \ldots, k_n)$ のうち高々有限個としか交わらない．一方これらの球体は Ω を被覆している．記号を簡単にするため，これらの球体を改めて

$$\{U(x_j, r_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$$

と記す．各 j に対して，関数

$$\rho_j := \rho_{x_j, r_j}$$

を取る．ρ_j は $U(x_j, r_j)$ の外ではゼロなので，任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対して，その上でゼロでない ρ_j 達は高々有限個である．従って

$$\phi(x) := \sum_{j\in\mathbb{N}} \rho_j(x)$$

は，各 $x \in \Omega$ で収束し，また $U(x_j, r_j)$ が Ω を被覆し ρ_j が $U(x_j, r_j)$ 上正であることから ϕ は正であることが分かる．

$$\phi_j(x) := \frac{\rho_j(x)}{\phi(x)}$$

と置くことで定理のすべての条件を満たす関数系を得る．($U(x_j, r_j)$ はいずれかの U_i に含まれるように選んでおいたことを思い出すこと)．　□

19 章の演習

1) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合で Vol $(\Omega) < \infty, f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を可測で $|f|^p \in L^1(\Omega)$ とする．

$$\Phi_p(f) := \Big(\frac{1}{\mathrm{Vol}\ (\Omega)} \int_\Omega |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

とするとき，次を示せ．

a) $\lim_{p \to -\infty} \Phi_p(f) = \mathrm{ess\ inf}\,|f|$.

b) $\lim_{p \to 0} \Phi_p(f) = \exp\big(\frac{1}{\mathrm{Vol}\ (\Omega)} \int_\Omega \log|f(x)| dx\big)$
（極限が存在することを仮定する）．

2) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合，$1 \le p < q \le \infty$ とする．$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ で $L^p(\Omega)$ では収束するが $L^q(\Omega)$ では収束しない例を構成せよ．また，開集合 Ω で $L^q(\Omega)$ では収束するが $L^p(\Omega)$ では収束しないものは存在するか？ Ω が有界のときはどうか？

3) $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) := \sin^n(\pi n x)$$

で定義する．$1 \le p < \infty$ のとき

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n\|_{L^p((0,1))} = 0$$

を示せ．

4) $0 < s \le 1$ とし，$L^s(\mathbb{R}^d)$ を可測関数 f の同値類で $|f|^s \in L^1(\mathbb{R}^d)$ となるものとする．$L^s(\mathbb{R}^d)$ がベクトル空間であることを示せ．

$$\|f\|_s := \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^s dx\Big)^{\frac{1}{s}}$$

とおく．非負な $f, g \in L^s(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\|f\|_s + \|g\|_s \le \|f + g\|_s.$$

5) $1 \le p < \infty$ とし，$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ が f にほとんどいたるところで各点収束しているとする．

a) すべての n で $\|f_n\|_p \le M < \infty$ のとき $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ であり，$\|f\|_p \le M$ となることを示せ．

$p = 1$ に対して $\|f_n\|_p$ が $\|f\|_p$ に収束しない例を構成せよ．

b) $\|f_n\|_p$ が $\|f\|_p$ に収束するとき f_n は f に L^p で収束すること，つまり $\|f_n - f\|_p$ が 0 に収束することを示せ．

（ヒント：任意の $\varepsilon > 0$ でコンパクトな集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ と $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \ge n_0$ に対して

$$\int |f_n(x)|^p dx < \varepsilon$$

となることを示せ.)（ヒント：エゴロフ(Egorov)の定理を使え.)

c) $p=\infty$ の場合はどうか？

6) $L^\infty(\mathbb{R})$ は可分でないことを示せ.（距離空間 (X,d) が可分であるとは可算部分集合 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で, X で稠密なものが存在すること, つまり任意の開球体 $U(p,r)\subset X$ に対して $n_0\in\mathbb{N}$ があって $x_{n_0}\in U(p,r)$ となること.)（ヒント：$L^\infty(\mathbb{R})$ の部分集合で区間の特性関数よりなるものを考えよ.)

7) f を Ω 上の非負可測関数, $c>0$, $A_c:=\{x: f(x)\geq c\}$ とする. $f\in L^p$ のとき

$$c^p\ \mathrm{Vol}\ (A_c)\leq\int f^p$$

を示せ. 逆に $\mathrm{Vol}\ (\Omega)<\infty$ で, ある定数 M, $\eta>0$ が存在して, すべての $c>0$ で

$$\mathrm{Vol}\ (A_c)\leq Mc^{-p-\eta}$$

となるとき $f\in L^p(\Omega)$ を示せ.

8) $0<x<1$ に対して, $f(x):=(1+x^{\frac{1}{p}})^p+(1-x^{\frac{1}{p}})^p$ とおく.

a) $p\geq 2$ のとき, 以下の不等式を示せ $(0<x<1)$.

(i) $$f''(x)\leq 0.$$

(ii) $$f(x)\leq f(y)+(x-y)f'(y)\quad (0<y<1).$$

(iii) $$f(x)\leq 2^{p-1}(x+1).$$

(iv) $$f(x)\leq 2(1+x^{\frac{q}{p}})^{\frac{p}{q}},\qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

b) $1\leq p<2$のとき, 上の不等式は“ $\leq$ ”ではなく“ $\geq$ ”となることを示せ.

9) a) 上の演習を使って, 以下の不等式を $a,b\in\mathbb{R}, p\geq 2, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ に対して示せ.

(i) $$2(|a|^p+|b|^p)\leq|a+b|^p+|a-b|^p\leq 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p).$$

(ii) $$|a+b|^p+|a-b|^p\leq 2(|a|^q+|b|^q)^{\frac{p}{q}}.$$

(iii) $$2(|a|^p+|b|^p)^{\frac{q}{p}}\leq|a+b|^q+|a-b|^q.$$

これらの不等式を用いてクラークソンの不等式

$$2(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p)\leq\|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p\leq 2^{p-1}(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p)$$
$$\|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p\leq 2(\|f\|_q^q+\|g\|_q^q)^{\frac{p}{q}}$$
$$2(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p)^{\frac{q}{p}}\leq\|f+g\|_q^q+\|f-g\|_q^q$$

を $f,g\in L^p$ $(p\geq 2)$ に対して示せ.

b) $1\leq p<2$ のとき , 上の不等式が“ $\leq$” ではなく“ $\geq$” となることを示せ.（ヒント：演習 4 よりミンコフスキーの不等式を $0<s\leq 1$ となる L^s で用いよ.)

第20章

部分積分，弱微分，ソボレフ空間

弱微分の概念を部分積分を基に定義する．L^p 関数でその弱微分も L^p 関数となるような関数のなす空間をソボレフ (Sobolev) 空間という．ソボレフの埋め込み定理よりソボレフ関数はその弱微分が十分強い可積分条件を満たせば連続である．レリッヒ (Rellich) のコンパクト性定理より，関数列の弱微分の積分の有界性はその関数列の部分列が L^p において収束することを意味している．

補題 20.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合，また $1 \leq i \leq d$ とする．任意の $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^i} dx = 0. \tag{1}$$

証明 $x \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega$ では $\varphi(x) = 0$ とおくことで $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ としてよい．$M \in \mathbb{R}$ に対して $\mathrm{supp}\varphi \subset [-M, M]^d$ とおく．一般性を失わずに $i = d$ としてよい．固定した $(x^1, \ldots, x^{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^d}(x^1, \ldots, x^d) dx^d = \varphi(x^1, \ldots, x^{d-1}, M) - \varphi(x^1, \ldots, x^{d-1}, -M) = 0$$

であり，よって

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^d} dx = 0.$$

□

(1) より $f \in C^1(\Omega), \varphi \in C_0^1(\Omega)$（したがって $f\varphi \in C_0^1(\Omega)$）に対して

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \varphi(x) dx = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) dx \tag{2}$$

を積の微分公式より得る．

これを繰り返すことで $f \in C^2(\Omega), \varphi \in C_0^2(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x^i)^2} \varphi(x) dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) = \int_\Omega f(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{(\partial x^i)^2} dx \tag{3}$$

であり，i に関して和をとると

$$\int_\Omega \Delta f(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega \operatorname{grad} f(x)\cdot \operatorname{grad}\varphi(x)dx = \int f(x)\Delta\varphi(x)dx. \quad (4)$$

ただしここで積分の中の・は $\mathbb{R}^d$ の内積を表している．

定義 20.2 以下

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} : f \in L^1(\Omega')\ \forall\, \Omega' \Subset \Omega\}.$$

とおく．

定義 20.3 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ とする．関数 $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ は任意の $\varphi \in C^1_0(\Omega)$（テスト関数と呼ぶ）に対して

$$\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^i}dx \quad (5)$$

を満たすとき f の $x^i(x = (x^1,\ldots,x^d) \in \mathbb{R}^d)$ 方向の弱微分であるといい，$v = D_i f$ と書く．$i = 1,\ldots,d$ で f が弱微分 $D_i f$ を持つとき $Df = (D_1 f,\ldots,D_d f)$ と表す．

明らかにすべての $f \in C^1(\Omega)$ は弱微分を持つ．つまり(2)と(5)を見比べると

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

であることがわかる．しかし弱微分は持つが $C^1(\Omega)$ に属さない関数は存在する．一方すべての L^1_{loc} 関数が弱微分を持つとは限らない．

例　$\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$ とおく．

1）$f(x) := |x|$. f は弱微分を持ち

$$Df(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ -1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

である．なぜなら任意の $\varphi \in C^1_0((-1,1))$ で

$$\int_{-1}^{0}(-\varphi(x))dx + \int_0^1 \varphi(x)dx = -\int_{-1}^{1}\varphi'(x)\cdot|x|dx$$

だからである．

2）

$$f(x) := \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

は弱微分を持たない．なぜなら $Df(x)$ は $x \neq 0$ でゼロでなくてはならないが，もしそうであれば L^1_{loc} 関数として，$Df \equiv 0$ である，しかし任意の $\varphi \in C^1_0(-1,1)$ に対して

$$0 = \int_{-1}^{1} \varphi(x) \cdot 0 \, dx = -\int_{-1}^{1} \varphi'(x) f(x) dx = -\int_{0}^{1} \varphi'(x) dx = \varphi(0)$$

とはならない．

同様に高階の弱微分も定義する

定義 20.4 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ とする．$\alpha := (\alpha_1, \dots \alpha_d)$, $\alpha_i \ge 0$ $(i = 1, \dots d)$, $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i > 0$ に対して

$$D_\alpha \varphi := (\frac{\partial}{\partial x^1})^{\alpha_1} \dots (\frac{\partial}{\partial x^d})^{\alpha_d} \varphi \ \left(\varphi \in C^{|\alpha|}(\Omega)\right)$$

とおく．関数 $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ は

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \cdot D_\alpha \varphi dx \ \forall \ \varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$$

となるとき f の α 階弱微分といい，$v = D_\alpha f$ と表す．

定義 20.5 $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$ に対して，ソボレフ (Sobolev) 空間 $W^{k,p}(\Omega)$ を $W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : D_\alpha f$ がすべての $|\alpha| \le k$ に対して存在して $L^p(\Omega)$ に属する $\}$ で定義する．

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := (\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D_\alpha f|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \le p < \infty),$$

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le k} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |D_\alpha f(x)|.$$

L^p 空間と同様ソボレフ空間 $W^{k,p}(\Omega)$ はノルム空間である．ソボレフ空間 $W^{k,p}(\Omega)$ がバナッハ空間であることを示したい．これ以降，この章では $1 \le p < \infty$ の場合だけを考える．

例 例として $\Omega = U(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$ で

$$f(x) = \|x\|^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

が $W^{1,p}(\Omega)$ にいつ属するかを考える．

まず $x \neq 0$，$i = 1, \ldots, d$ で

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\|x\|^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^i}(\sum_{j=1}^d |x^j|^2)^{\frac{\alpha}{2}} = \alpha x^i (\sum_{j=1}^d |x^j|^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}.$$

19章ですでに

$$\|x\|^\alpha \in L^p(\Omega) \iff \alpha p + d > 0$$

を見ている．従って，$|\frac{\partial}{\partial x^i}\|x\|^\alpha| \leq |\alpha|\|x\|^{\alpha-1}$ なので $\frac{\partial}{\partial x^i}\|x\|^\alpha \in L^p(\Omega)$ が $(\alpha-1)p+d>0$ のとき成立する．

次に $d+\alpha>1$ に対して

$$v(x) := \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^i}\|x\|^\alpha & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

が $\|x\|^\alpha$ の弱微分であることを示す．これにより

$$\|x\|^\alpha \in W^{1,p}(\Omega)\,(\,(\alpha-1)p+d>0)$$

を示したことになる．v が $\|x\|^\alpha$ の弱微分であることを確かめるために

$$\eta_n(r) := \begin{cases} 1 & r \geq \frac{2}{n} \\ n(r-\frac{1}{n}) & \frac{1}{n} \leq r < \frac{2}{n} \\ 0 & 0 \leq r < \frac{1}{n} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

とおく．$\varphi \in C_0^1(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \|x\|^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}(\eta_n(\|x\|)\varphi(x))dx = -\int_\Omega \frac{\partial\|x\|^\alpha}{\partial x^i}\eta_n(\|x\|)\varphi(x)dx$$

である．ここで η_n が0の近傍で消えており，$\frac{\partial}{\partial x^i}\|x\|^\alpha$ の特異点の影響が0の近傍で消えていることを使った．

しかしながら，ここで $\varphi \cdot \eta_n$ が C^1 関数でない場合に，部分積分を使うことを正当化しなくてはいけないが，近似を使った議論もしくは補題19.14によって正当化される．

優収束定理より $(\alpha-1)+d>0$ に対して

$$\int_\Omega \frac{\partial\|x\|^\alpha}{\partial x^i}\eta_n(\|x\|)\varphi(x)dx \to \int_\Omega v(x)\varphi(x)dx$$

が $n \to \infty$ で成立し，また

$$\int_\Omega \|x\|^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}(\eta_n(\|x\|)\varphi(x))dx \to \int_\Omega \|x\|^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}\varphi(x)dx$$

であることは，$r = \|x\|$ とおくと

$$|\int_\Omega \|x\|^\alpha \varphi(x) D_i \eta_n(\|x\|)dx| \le c_0 \sup|\varphi| \cdot \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} r^\alpha \cdot n r^{d-1} dr \quad \text{（定理 13.21）}$$

（となる定数 c_0 が存在する）

$$= c_0 \frac{\sup|\varphi|}{d+\alpha} \cdot n((\frac{2}{n})^{d+\alpha} - (\frac{1}{n})^{d+\alpha})$$
$$\to 0 \quad (n \to \infty, \quad d+\alpha > 1)$$

であることからわかる．これより v が $\|x\|^\alpha$ の i 階弱微分であることが $d+\alpha>1$ に対して確かめられた．

補題 20.6 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ とし，$v = D_i f$ が存在すると仮定する．$\mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) > h$ であれば

$$D_i(f_h(x)) = (D_i f)_h(x).$$

ここで f_h は 19 章で定義された滑らかな核関数 ρ_1 との合成積である．

証明　積分下で微分することで

$$\begin{aligned} D_i(f_h(x)) &= \frac{1}{h^d}\int \frac{\partial}{\partial x^i}\rho(\frac{x-y}{h})f(y)dy \\ &= \frac{-1}{h^d}\int \frac{\partial}{\partial y^i}\rho(\frac{x-y}{h})f(y)dy \\ &= \frac{1}{h^d}\int \rho(\frac{x-y}{h})D_i f(y)dy \quad (D_i f \text{ の定義より}) \\ &= (D_i f)_h(x). \end{aligned}$$

□

定理 20.7 $f, v \in L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ とする．このとき $v = D_i f$

$$\Leftrightarrow \exists\,(f_n) \subset C^\infty(\Omega) : L^p(\Omega) \text{ で } f_n \to f, \quad L^p(\Omega') \text{ で } \frac{\partial}{\partial x^i} f_n \to v \ (\forall \Omega' \Subset \Omega).$$

証明　“$\Longrightarrow$”：前の補題のときと同様に合成積 f_h を考える．任意の $\Omega' \Subset \Omega$ 上 h を十分小さく取れば，上記の補題より $v_h = D_i(f_h)$ であり，定理 19.16 より $h \to 0$ で

$$L^p(\Omega) \text{ で } f_h \to f, \quad L^p(\Omega') \text{ で } v_h \to v$$

が分かる．

"$\Longleftarrow$"：$\varphi \in C_0^1(\Omega)$ とする．$\varphi, D_i\varphi$ $(i=1,\ldots,d)$ は有界で優収束定理より

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi(x)dx = -\lim_{n\to\infty}\int D_if_n(x)\varphi(x)dx$$

$$= -\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx$$

を得る．よって $v = D_if$．　□

定義 20.8 $H^{k,p}(\Omega)$ を $W^{k,p}$ ノルムに関する $C^\infty(\Omega)\cap W^{k,p}(\Omega)$ の閉包，$H_0^{k,p}(\Omega)$ を $W^{k,p}$ ノルムに関する $C_0^\infty(\Omega)$ の閉包と定義する．

この定義では，記号を少々乱用している．$C^\infty(\Omega)$ は関数のなす空間であり，$W^{k,p}(\Omega)$ は関数の同値類のなす空間である．しかし，その意味するところは明らかであろう．

$f \in H_0^{k,p}(\Omega)$ となる必要十分条件は，ある関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ で $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$ となるものが存在することである．

$k \geq 1$ のとき，$H_0^{k,p}(\Omega)$ に属する関数は，後で正確に述べるような意味で，$\partial\Omega$ 上の値が消えている．

系 20.9 $1 \leq p < \infty, k \in \mathbb{N}$ とする．$W^{k,p}(\Omega)$ は $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ に関して完備であり，よってバナッハ空間である．

証明　$k=1$ の場合を考える．一般の場合は帰納法より従う．f_n を $W^{1,p}(\Omega)$ のコーシー列とする．f_n, D_if_n $(i=1,\ldots,d)$ は $L^p(\Omega)$ のコーシー列．$L^p(\Omega)$ は完備なので $f, v^i \in L^p(\Omega)$ が存在して，$L^p(\Omega)$ で $f_n \to f, D_if_n \to v^i$ $(i=1,\ldots,d)$．

次に $\phi \in C_0^1(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega D_if_n\cdot\phi = -\int_\Omega f_nD_i\phi.$$

左辺は $\int_\Omega v^i\cdot\phi$ に収束し，右辺は $-\int_\Omega f\cdot D_i\phi$ に収束する．よって $D_if = v^i$ であり，したがって $f \in W^{1,p}(\Omega)$．これにより $W^{1,p}(\Omega)$ の完備性が示せた．　□

系 20.10 $1 \leq p < \infty, k \in \mathbb{N}$ で

$$W^{k,p}(\Omega) = H^{k,p}(\Omega).$$

証明　$C^\infty(\Omega)\cap W^{k,p}(\Omega)$ が $W^{k,p}(\Omega)$ で稠密であることを示せばよい．

$$\Omega_n := \{x\in\Omega : \|x\| < n, \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \frac{1}{n}\}(n\in\mathbb{N}),\quad \Omega_0 := \Omega_{-1} := \emptyset$$

と置くと

$$\Omega_n \Subset \Omega_{n+1}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$$

である．定理 19.23 で構成した，Ω の被覆 $\{\Omega_{n+2} \setminus \overline{\Omega_{n-1}}\}$ に従属する 1 の分割 $\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を取ってくる．$f \in W^{k,p}(\Omega)$ としよう．定理 20.7 より $\varepsilon > 0$ に対して E数 h_n と $n \in \mathbb{N}$ が存在して

$$h_n \le \operatorname{dist}(\Omega_n, \partial\Omega_{n+1})$$
$$\|(\phi_n f)_{h_n} - \phi_n f\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

とできる．ϕ_n の満たす性質より，各 $\Omega' \Subset \Omega$ 上でゼロでない滑らかな関数 $(\phi_n f)_{h_n}$ は高々有限個である．従って

$$\widetilde{f} := \sum_n (\phi_n f)_{h_n} \in C^\infty(\Omega).$$

$$\|f - \widetilde{f}\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le \sum_n \|(\phi_n f)_{h_n} - \phi_n f\| < \varepsilon$$

であり，これにより，すべての $W^{k,p}(\Omega)$ 関数は $W^{k,p}(\Omega)$ に属する滑らかな関数によって近似されることが証明された． □

19 章(系 19.21)で $C_0^\infty(\Omega)$ は L^p ノルムに関して $L^p(\Omega)$ で稠密であることを見た．前述の系は $C^\infty(\Omega)$ が $W^{k,p}(\Omega)$ で $W^{k,p}(\Omega)$ ノルムに関して稠密であることを意味している．$k \ge 1$ に対して $C_0^\infty(\Omega)$ は $W^{k,p}(\Omega)$ で稠密ではない．後に，ゼロでない定数は $H_0^{k,p}(\Omega)$ に属さないこと，したがって $C_0^\infty(\Omega)$ の閉包にも属さないことを例で見る．一方，$\operatorname{Vol}(\Omega) < \infty$ となる Ω では定数は，もちろん $W^{k,p}(\Omega)$ に属する．$H_0^{1,p}(\Omega)$ がどのような空間であるかの感覚をつかむために，例として $\Omega = U(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$ を考える．$f \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$，$\partial\Omega$ 上 $f = 0$ とする．f が $H_0^{1,p}(\Omega)$ に属することを証明する．そのために $\lambda > 1$ に対して

$$f_\lambda(x) := f(\lambda x)$$

とおく．f_λ はコンパクトな台を持つので，十分小さい h に対して正則化 $f_{\lambda,h}$ もまたコンパクトな台を持つ(λ によらずにとれる)．したがって $f_\lambda \in H_0^{1,p}(\Omega)$．また $\lambda \to 1$ で f_λ は各点ごとに f に収束し，$D_i f_\lambda(x) = \lambda \frac{\partial}{\partial x^i} f(\lambda x)$ は各点ごとに $\frac{\partial}{\partial x^i} f(x)$ に収束する．優収束定理より f_λ もまた f に $W^{1,p}$ ノルムで収束し $H_0^{1,p}(\Omega)$ は定義より閉なので $f \in H_0^{1,p}(\Omega)$．

ソボレフ関数を扱うための公式を与える．

補題 20.11 $1 \le p < \infty$ とする．$f \in W^{1,p}(\Omega), \psi \in C^1(\mathbb{R})$ で

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |\psi'(y)| < \infty$$

となるものとする．このとき

$$\psi \circ f \in W^{1,p}(\Omega), D(\psi \circ f) = \psi'(f)Df.$$

証明　$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ とし，$W^{1,p}(\Omega)$ で $n \to \infty$ のとき $f_n \to f$ とする．

$$\int_\Omega |\psi(f_n) - \psi(f)|^p dx \leq \sup |\psi'|^p \int_\Omega |f_n - f|^p dx \to 0$$

であり，また

$$\int_\Omega |\psi'(f_n)Df_n - \psi'(f)Df|^p dx \leq 2^p (\sup |\psi'|^p \int_\Omega |Df_n - Df|^p dx$$
$$+ \int_\Omega |\psi'(f_n) - \psi'(f)|^p |Df|^p dx).$$

定理 19.12 より，適当な部分列 f_n がほとんどいたるところで f に Ω で収束する．ψ' は連続なので $\psi'(f_n)$ もまた，ほとんどいたるところで各点ごとに $\psi'(f)$ に収束し，したがってルベーグの優収束定理により最後の積分はゼロに近づく．

これより

$$\psi(f_n) \to \psi(f) \quad (L^p(\Omega)\text{ で})$$
$$D(\psi(f_n)) = \psi'(f_n)Df_n \to \psi'(f)Df \quad (L^p(\Omega)\text{ で})$$

であり，定理 20.7 より

$$\psi \circ f \in W^{1,p}(\Omega) \text{ かつ } D(\psi \circ f) = \psi'(f)Df.$$

□

系 20.12　$f \in W^{1,p}(\Omega)(1 \leq p < \infty)$ であれば $|f|$ もまた $W^{1,p}(\Omega)$ に属し，

$$D_i|f|(x) = \begin{cases} D_i f(x) & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, d) \\ -D_i f(x) & f(x) < 0 \end{cases}.$$

証明　$\varepsilon > 0$ に対し

$$\psi_\varepsilon(f) := (f^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon$$

とおく．ψ_ε は補題 20.11 の仮定を満たすので，$\varphi \in C_0^1(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \psi_\varepsilon(f(x)) D_i \varphi(x) dx = -\int \frac{f(x) D_i f(x)}{(f^2(x) + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \varphi(x) dx.$$

がゼロに近づくとし，普通の優収束定理を適用すると

$$\int_{\Omega} |f(x)| D_i \varphi(x) dx = -\int v(x)\varphi(x) dx$$

$$v(x) = \begin{cases} D_i f(x) & f(x) > 0, \\ 0 & f(x) = 0, \\ -D_i f(x) & f(x) < 0. \end{cases}$$

これは $|f|$ が弱微分可能で，その微分が求める形になっていることを意味している．$|f|$ が $W^{1,p}$ に属することはただちにわかる． □

系 20.13 $f \in W^{1,p}(\Omega)$，$A \subset \Omega, f \equiv$ A 上定数 とする．このとき A 上ほとんどいたるところ $Df = 0$ である．

証明 A 上 $f \equiv 0$ としてよい．系 20.12 より A 上 $Df = D|f| = 0$. □

補題 20.14 $1 \leq p < \infty$ とし，$\Omega_0 \subset \Omega, g \in W^{1,p}(\Omega)$, $h \in W^{1,p}(\Omega_0)$ $h - g \in H_0^{1,p}(\Omega_0)$ とする．このとき

$$f(x) := \begin{cases} h(x) & x \in \Omega_0 \\ g(x) & x \in \Omega \backslash \Omega_0 \end{cases}$$

は $W^{1,p}(\Omega)$ に属し

$$D_i f(x) = \begin{cases} D_i h(x), & x \in \Omega_0 \\ D_i g(x) & x \in \Omega \backslash \Omega_0, \quad i = 1, \ldots, d. \end{cases}$$

このように，ある内部に含まれる部分集合上の $W^{1,p}$ に属するソボレフ関数を，同じ境界値を持つ別のソボレフ関数にソボレフ空間の中で取り替えることができる．$W^{1,p}$ 関数を考えている場合には角があることは問題にならない．

証明 h，f のかわりに $h - g$，$f - g$ を考えることで $g = 0$ として良い．以下のことを示す．

$h \in H_0^{1,p}(\Omega_0)$ のとき

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & x \in \Omega_0 \\ 0 & x \in \Omega \backslash \Omega_0 \end{cases}$$

はまた $W^{1,p}(\Omega)$ に属し，また

$$D_i f(x) = \begin{cases} D_i h(x) & x \in \Omega_0 \\ 0 & x \in \Omega \backslash \Omega_0 \end{cases}$$

である．$(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega_0)$ を $W^{1,p}$ ノルムで h に収束するような列とすると $C_0^\infty(\Omega)$ で

$$f_n(x) := \begin{cases} h_n(x) & x \in \Omega_0, \\ 0 & x \in \Omega \backslash \Omega_0 \end{cases}$$

で，微分は

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f_n(x) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^i} h_n(x) & x \in \Omega_0, \\ 0 & x \in \Omega \backslash \Omega_0. \end{cases}$$

主張は定理 20.7 よりただちに従う． □

まず，$d = 1$ の場合を考える．従って Ω は開区間 $I \subset \mathbb{R}$ とする．つまり

$$f \in H^{1,1}(I).$$

を考察する．

定理 20.7 より，f に収束する関数 $f_n \in C^\infty(I)$ でその微分が弱微分 Df に任意の $I' \subset I$ に対する $L^p(I')$ で収束するものが存在する．従って

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I'} |f_n(x) - f(x)| dx + \int_{I'} |\frac{df_n}{dx}(x) - Df(x)| dx = 0.$$

f_n は滑らかなので，$a, b \in I$ と $\varepsilon > 0$ に対して

$$|f_n(b) - f_n(a)| = |\int_a^b \frac{df_n}{dx}(x) dx| \leq \int_a^b |\frac{df_n(x)}{dx}| dx$$
$$\leq \int_a^b |Df(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

が十分大きな n に対して成立することが，上記の収束から分かる．

更に $Df \in L^1(I)$ なので，系 16.9 を使うと，$\delta > 0$ が存在して $a, b \in I$ が $|a - b| < \delta$ を満たせば

$$\int_a^b |Df(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する．

まとめると，n が十分大きく $|b-a|<\delta$ の場合に

$$|f_n(b)-f_n(a)|<\varepsilon$$

となる．よって f_n は同等連続で，アルツェラ・アスコリの定理 5.20 より連続な に一様収束する．

更に，上記の不等式で $n\to\infty$ とすることで，

$$|f(b)-f(a)|\le\int_a^b|Df(x)|dx$$

が任意の $a,b\in I$ で成立する．

よって，特に $d=1$ の場合 $H^{1,1}$ 関数は一様連続である．

いよいよ重要な**ソボレフの埋め込み定理**を述べよう．これは上に見た $d=1$ の場合の議論を $d>1$ に拡張したものである．

定理 20.15 $(1\le p<\infty)$，$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ を有界な開集合とし $f\in H_0^{1,p}(\Omega)$ とする．

$p<d$ のとき

$$f\in L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega),$$

$p>d$ のとき

$$f\in C^0(\overline{\Omega}).$$

さらに，ある定数 $c=c(p,d)$ が存在してすべての $f\in H_0^{1,p}(\Omega)$ に対して

$$\|f\|_{L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)}\le c\|Df\|_{L^p(\Omega)}\quad(\,p<d) \tag{6}$$

$$\sup_{x\in\Omega}|f(x)|\le c\,\mathrm{Vol}\,(\Omega)^{\frac{1}{d}-\frac{1}{p}}\|Df\|_{L^p(\Omega)}\quad(\,p>d). \tag{7}$$

証明 $d=1$ の場合はすでに考察したので，$d>1$ の場合を考える．まず $f\in C_0^1(\Omega)$ と仮定し，$p=1$ の場合を扱う．[1] 通常どおり $x=(x^1,\dots,x^d)$ とおく．$i=1,\dots,d$ に対して

$$|f(x)|\le\int_{-\infty}^{x^i}|D_if(x)|dx^i.$$

---

[1] $d=1$ の場合のソボレフ空間の扱いは『関数解析』ハイム・ブレジス (Haïm Brezis) 藤田宏監訳，小西芳雄訳，産業図書に詳しいと東北大学大学院理学研究科の中島徹氏に教わった．

ここで f がコンパクトな台を持つことを使った．したがって

$$|f(x)|^d \leq \prod_{i=1}^{d} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i f| dx^i.$$

この表現は

$$\prod_{i=1}^{d} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i f(x^1, \ldots, x^{i-1}, y, x^{i+1}, \ldots, x^d)| dy$$

を省略したものであり

$$|f(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq (\prod_{i=1}^{d} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i f| dx^i)^{\frac{1}{d-1}}.$$

これより

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|^{\frac{d}{d-1}} d\xi^1 \leq (\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 f| dx^1)^{\frac{1}{d-1}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\prod_{i=2}^{d} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i f| dx^i)^{\frac{1}{d-1}} d\xi^1$$

なので

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx^1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 f| dx^1\right)^{\frac{1}{d-1}} \cdot \left(\prod_{i \neq 1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i f| dx^i dx^1\right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

ここでは §19 の (11) ($p_1 = \ldots = p_{d-1} = d-1$ に対する一般化されたヘルダーの不等式) を使った．

さらに，同様の議論で

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx^1 dx^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_1 f| dx^1 dx^2\right)^{\frac{1}{d-1}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_2 f| dx^1 dx^2\right)^{\frac{1}{d-1}} \cdot \left(\prod_{i=3}^{d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i f| dx^i dx^1 dx^2\right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

これを繰り返すことで

$$\int_\Omega |f(x)|^{\frac{d}{d-1}}dx \le \left(\prod_{i=1}^d \int_\Omega |D_i f|dx\right)^{\frac{1}{d-1}}$$

となり

$$\begin{aligned}\|f\|_{\frac{d}{d-1}} &\le \left(\prod_{i=1}^d \int_\Omega |D_i f|dx\right)^{\frac{1}{d}} \\ &\le \frac{1}{d}\int_\Omega \sum_{i=1}^d |D_i f|dx.\end{aligned}$$

最後の不等式では幾何平均は算術平均より大きくはならないことを使った．これより

$$\|f\|_{\frac{d}{d-1}} \le \frac{1}{d}\|Df\|_1. \tag{8}$$

これは(6)の $p=1$ の場合である．

(8)式を $|f|^\gamma(\gamma>1)$ に用いると

$$\||f|^\gamma\|_{\frac{d}{d-1}} \le \frac{\gamma}{d}\int_\Omega |f|^{\gamma-1}|Df|dx \tag{9}$$

を得(補題 20.11 の連鎖律を使う)，

$$\le \frac{\gamma}{d}\||f|^{\gamma-1}\|_q \cdot \|Df\|_p \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

となる(ヘルダーの不等式より)．

$p<d$ のとき $\gamma=\frac{(d-1)p}{d-p}$ は $\frac{dp}{d-p}=\frac{\gamma d}{d-1}=\frac{(\gamma-1)p}{p-1}$ を満たし，$q=\frac{p}{p-1}$ であることを考えると(9)より

$$\|f\|^\gamma_{\frac{\gamma d}{d-1}} \le \frac{\gamma}{d}\|f\|^{\gamma-1}_{\frac{\gamma d}{d-1}}\cdot\|Df\|_p.$$

よって

$$\|f\|_{\frac{\gamma d}{d-1}} \le \frac{\gamma}{d}\|Df\|_p. \tag{10}$$

これは(6)式である．

次に $p>d$ の場合を扱う．

$$\mathrm{Vol}\,(\Omega)=1, \tag{11}$$

$$\|Df\|_{L^p(\Omega)}=1 \tag{12}$$

を仮定する．(9)式は

$$\||f|^\gamma\|_{\frac{d}{d-1}} \le \frac{\gamma}{d}\||f|^{\gamma-1}\|_{\frac{p}{p-1}}$$

となるので

$$\|f\|_{\gamma\frac{d}{d-1}} \le (\frac{\gamma}{d})^{\frac{1}{\gamma}}\|f\|_{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

であり，したがって系 19.7 より $\mathrm{Vol}\,(\Omega)=1$ であるから

$$\|f\|_{\gamma\frac{d}{d-1}} \le (\frac{\gamma}{d})^{\frac{1}{\gamma}}\|f\|_{\gamma\frac{p}{p-1}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \tag{13}$$

次に

$$\gamma = \frac{d}{d-1}\cdot\frac{p-1}{p} > 1 \quad (p > d\ \text{なので})$$

とおく．(13)の γ を γ^n に置き換えると

$$\|f\|_{\gamma^n\frac{d}{d-1}} \le \left(\frac{\gamma^n}{d}\right)^{\frac{1}{\gamma^n}}\|f\|_{\gamma^{n-1}\frac{d}{d-1}}^{\frac{\gamma^n-1}{\gamma^n}} \tag{14}$$

を得る．これは

$$\gamma^n\frac{p}{p-1} = \gamma^{n-1}\frac{d}{d-1}$$

だからである．もし可算無限個の $n\in\mathbb{N}$ で

$$\|f\|_{\gamma^n\frac{d}{d-1}} \le 1$$

であれば，系 19.9 より

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)| \le 1 \tag{15}$$

を(11)と正規化したことを用いて示せる．逆にすべての $n\ge n_0$ (n_0 は最小のものをとる)で

$$\|f\|_{\gamma^n\frac{d}{d-1}} \ge 1$$

であれば，(14)より $n\ge n_0+1$ に対して

$$\|f\|_{\gamma^n\frac{d}{d-1}} \le (\frac{\gamma^n}{d})^{\frac{1}{\gamma^n}}\|f\|_{\gamma^{n-1}\frac{d}{d-1}} \tag{16}$$

を得，(16)より

$$\|f\|_{\gamma^n\frac{d}{d-1}} \le \frac{\gamma^{\sum_{\nu=n_0+1}^{n}\nu\frac{1}{\gamma^\nu}}}{d^{\sum_{\nu=n_0+1}^{n}\frac{1}{\gamma^\nu}}}\|f\|_{\gamma^{n_0}\frac{d}{d-1}}. \tag{17}$$

さらに，$n=n_0$ の場合の(14)を用いて

$$\|f\|_{\gamma^n\frac{d}{d-1}} \le \frac{\gamma^{\sum_{\nu=n_0}^{n}\nu\frac{1}{\gamma^\nu}}}{d^{\sum_{\nu=n_0}^{n}\frac{1}{\gamma^\nu}}}\|f\|_{\gamma^{n_0-1}\frac{d}{d-1}}^{\frac{\gamma^{n_0}-1}{\gamma^{n_0}}}$$

得る．$\|f\|_{\gamma^{n_0-1}\frac{d}{d-1}}$ の前の定数は n によらない定数で押さえることができる．$n_0 \neq 1$ の場合には $\|f\|_{\gamma^{n_0-1}\frac{d}{d-1}} \leq 1$，$n_0 = 1$ の場合は，(8) と正規化 $\|Df\|_p = 1$ を考慮して，

$$\|f\|_{\gamma^{n_0-1}\frac{d}{d-1}} = \|f\|_{\frac{d}{d-1}} \leq \frac{1}{d}$$

なので，いずれの場合も $\|f\|_{\gamma^n\frac{d}{d-1}}$ が n, f によらない定数で上から押さえられる．したがって系 19.9 より，$n \to \infty$ での極限をとると

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| \leq c(p,d). \tag{18}$$

最後に正規化(11)，(12)をはずす．$\|Df\|_p \neq 0$ の場合は $g := \frac{f}{\|Df\|_p}$ とおく．すると g は(12)を満たし(18)を g に適用すると

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| \leq c(p,d)\|Df\|_p \tag{19}$$

を得る．C_0^1 関数 f で $\|Df\|_p = 0$ となるものは，恒等的にゼロなので主張は自明である．

最後に(11)を除くために，座標変換

$$y = y(x) = \operatorname{Vol}(\Omega)^{-\frac{1}{d}} x, \tag{20}$$

$$\tilde{\Omega} := \{y : x \in \Omega\},$$
$$\tilde{f}(y) := f(x)$$

を考える．

$$\operatorname{Vol}\tilde{\Omega} = 1,$$

$$D_i f(x) = D_i\tilde{f}(y)\ \operatorname{Vol}(\Omega)^{-\frac{1}{d}},$$

$$\Bigl(\int_\Omega |D_i f(x)|^p dx\Bigr)^{\frac{1}{p}} = \Bigl(\int_{\tilde{\Omega}} |D_i\tilde{f}(y)|^p (\operatorname{Vol}\Omega) dy\Bigr)^{\frac{1}{p}} \cdot\ \operatorname{Vol}(\Omega)^{-\frac{1}{d}}$$

なので，(19)を $\tilde{f}$ に適用すると

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| \leq c(p,d)\ \operatorname{Vol}(\Omega)^{\frac{1}{d}-\frac{1}{p}}\|Df\|_p \tag{21}$$

となるが，これが示したかったことである．

ここまで $f \in C_0^1(\Omega)$ の場合だけを考えてきた．$f \in H_0^{1,p}(\Omega)$ の場合は f を $W^{1,p}$ ノルムに関して C_0^∞ 関数列 f_n で近似し(6)，(7)を $f_n - f_m$ に用いる．$(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は L^p のコーシー列なので，$L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$ のコーシー列($p < d$ の場合)，または $C^0(\overline{\Omega})$ のコーシー列($p > d$ の場合)．よって f も，それぞれの場合に対応する空間に属し(6)または(7)を満たす． □

系として，ポアンカレ(Poincaré)の不等式を得る．

系 20.16 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界な開集合，$f \in H_0^{1,2}(\Omega)$ とする．

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C\mathrm{Vol}\,(\Omega)^{\frac{1}{d}}\|Df\|_{L^2(\Omega)} \qquad (C\text{ は定数})$$

証明　定理 20.15 より

$$\begin{aligned}\|f\|_2 &\leq C\|Df\|_{\frac{2d}{d+2}} \quad \left(p = \tfrac{2d}{d+2}\text{ ととって}\right)\\ &\leq C\mathrm{Vol}\,(\Omega)^{\frac{d+2}{2d}-\frac{1}{2}}\|Df\|_2 \quad (\text{系 19.7 より})\\ &= C\mathrm{Vol}\,(\Omega)^{\frac{1}{d}}\|Df\|_2.\end{aligned}$$

□

上の系から $H_0^{1,2}(\Omega)$ 上，ノルム $\|f\|_{W^{1,2}}$ とノルム $\|Df\|_{L^2}$ は同値であることがわかる．

さらに，ソボレフの埋め込み定理より，ゼロでない定数は $H_0^{1,p}(\Omega)$ に属していないことがわかる．よって $C_0^\infty(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ で稠密であるが $W^{1,p}(\Omega)$ では稠密でない．

例　$d > 1$ の場合，$H^{1,d}(\Omega)$ に属する関数は必ずしも有界でないことを示す例を挙げる．従って定理 20.15 の直前の $d = 1$ の場合に関する結果は高次元の場合には成立しない．

$$f(x) := \log(\log\frac{1}{r})\ (\,r = \|x\|)$$
$$U(0,R) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < R\}\,(\,R < 1)$$

とおく．$x \neq 0$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial r}f(x) = \frac{+1}{r\log r}$$

なので

$$\int\limits_{U(0,R)} |\frac{\partial}{\partial r}f(x)|^d dx = d\omega_d\int_0^R \frac{r^{d-1}}{r^d(\log r)^d}dr = \left.\frac{-d\omega_d}{(d-1)(\log r)^{d-1}}\right|_0^R$$
$$= \frac{-d\omega_d}{(d-1)(\log R)^{d-1}} < \infty.$$

あとは原点で特異点を持つ $\frac{\partial}{\partial r}f(x)$ が f の弱微分であることを示せばよい．これを示せば $f \in H^{1,d}(U(0,R))$ であるが f が $L^\infty(U(0,r))$ に属さないことがわかる．

このために，前と同様に

$$\eta_n(r) := \begin{cases} 1 & r \geq \frac{2}{n} \\ n(r - \frac{1}{n}) & \frac{1}{n} \leq r < \frac{2}{n} \\ 0 & 0 \leq r < \frac{1}{n} \end{cases}$$

おく．$\varphi \in C_0^1(U(0,R))$ に対して

$$\int_{U(0,R)} \log\log\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(\eta_n(r)\varphi(x))dx = -\int_{U(0,R)} \frac{\partial}{\partial x^i}(\log\log\frac{1}{r}) \cdot \eta_n(r)\varphi(x)dx$$

あり，$n \to \infty$ で極限をとると，$\|x\|^\alpha$ のときと同様に

$$\int_{U(0,R)} \log\log\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi(x)dx = -\int_{U(0,R)} \frac{\partial}{\partial x^i}(\log\log\frac{1}{r})\varphi(x)dx$$

得る．問題となる箇所については，

$$\left|\int_{U(0,R)} \log\log\frac{1}{r}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\eta_n(r)dx\right| \leq C\sup|\varphi(x)|\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \log\log\frac{1}{r}nr^{d-1}dr \to 0 \quad (n \to \infty).$$

れより $R < 1$ で $\log(\log\frac{1}{r}) \in H^{1,d}(U(0,R))$ が確かめられた．
最後に $H^{1,d}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2)$ に属する関数は必ずしも連続でないことを示す例を挙げる．

$$f(x) = \sin\log\log\frac{1}{r} \quad (r = \|x\|) \quad (R < 1 \text{ となる } U(0,R) \text{ 上}).$$

しかしながら，定理 20.15 と系 19.7 より

20.17 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界な開集合，$f \in H_0^{1,d}(\Omega)$ とする．すると

$$f \in L^p(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty)$$

成り立つ．

20.18 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界な開集合とする．このとき

$$H_0^{k,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{(d-kp)}}(\Omega) & kp < d, \\ C^m(\overline{\Omega}) & 0 \leq m < k - \frac{d}{p} \end{cases}$$

$(C^m(\overline{\Omega}) := \{f \in C^m(\Omega) : f$ とその m 階以下の微分は $\overline{\Omega}$ で連続である $\})$.

証明　最初の埋め込みは定理 20.15 を繰り返し使うことで，2 番目の埋め込みは最初の埋め込みと定理 20.15 の $p > d$ の場合を用いることで得られる．証明の詳細は $k = 2$ の場合は以下の通りである．

$k = 2$ の場合，証明に入る前に

$$H_0^{2,p}(\Omega) \subset H_0^{1,\frac{dp}{d-p}}(\Omega) \quad (p < d)$$

を見る．このため $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty$ を $W^{2,p}$ ノルムで f に収束する関数列とする．ソボレフ埋め込み定理より

$$\|f_n - f\|_{W^{1,\frac{dp}{d-p}}} \leq C\|f_n - f\|_{W^{2,p}}$$

なので $f \in H_0^{1,\frac{dp}{d-p}}$. よって $p < d$ に対して $H_0^{2,p} \subset H_0^{1,\frac{dp}{d-p}}$ を得る．

同様に $p = d$ の場合も，任意の q に対して $p' = qd/(d+q) < d$ とおくと，$1 \leq s \leq r \leq \infty$ で $L^r \subset L^s$（系 19.7．ここで Ω は有界と仮定していることを思い出す）なので，

$$H_0^{2,d}(\Omega) \subset H_0^{2,p'}(\Omega) \subset H_0^{1,q}(\Omega) \quad (\forall q < \infty)$$

を得る．

まず，定理の最初の埋め込みに関しては，$2p < d$ なので，$\frac{dp}{d-p} < d$ を満たし，定理 20.15 を p のかわりに $\frac{dp}{d-p}$ を適用すると，目的の不等式

$$H_0^{2,p}(\Omega) \subset L^{\frac{dp}{d-2p}}(\Omega)$$

を得る．

次に，$p < d$ かつ $\frac{dp}{d-p} > d$（つまり $2p > d$）であれば $H_0^{2,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$，$p = d$ であれば $H_0^{2,d}(\Omega) \subset H_0^{1,q}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ であることが，それぞれ上の考察と定理 20.15 よりわかる．

最後に $p > d$ である $f \in H_0^{2,p}(\Omega)$ に対して，f も Df も $\overline{\Omega}$ で連続．よって Df は古典的意味で f の微分である．これは，例えば定理 19.13 と補題 20.6 より従う．なぜなら関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1$ で，f_n も Df_n も一様収束すれば，$\lim Df_n$ は $\lim f_n$ の微分に収束することを見ればよいが，これは C^1 がバナッハ空間であるということで，すでに定理 5.12 で示した．したがって $p > d$ であれば $H_0^{2,p}(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$

同様にして任意の k に関して主張を確かめることができる．　□

20.19 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界な開集合とする．固定した p とすべての $k \in \mathbb{N}$ に対し $u \in H_0^{k,p}(\Omega)$ のとき $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. □

定理 20.15 より，$p < d$ のとき $H_0^{1,p}(\Omega)$ が $L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$ に連続埋め込みできること，つまり

$$i : H_0^{1,p}(\Omega) \to L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$$

が有界(＝連続)単射な線形写像となることがわかる．

連続線形写像がコンパクトであるとは，有界な列の像が収束する部分列を持つことであることであった．また，有界な Ω に対して，連続埋め込み

$$j : L^r(\Omega) \to L^q(\Omega) \quad (1 \leq q \leq r \leq \infty)$$

が存在する(系 19.7)．したがって，特に連続埋め込み

$$j \circ i : H_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega) \quad (1 \leq q \leq \frac{dp}{d-p})$$

が存在する．この埋め込みが $1 \leq q < \frac{dp}{d-p}$ に対してコンパクトであるというレリッヒ・コンドラコフ(Rellich-Kondrachov)のコンパクト性定理は以下のように述べられる．

定理 20.20 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界な開集合とする．$p < d$ で $1 \leq q < \frac{dp}{d-p}$, または $p \geq d$ で $1 \leq q < \infty$ のとき $H_0^{1,p}(\Omega)$ は $L^q(\Omega)$ にコンパクトに埋め込める．

この定理を後では主に以下のような形で用いる．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^{1,2}(\Omega)$ が有界で

$$\|f_n\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq K$$

とする．このとき (f_n) は L^2 ノルムに関して収束する部分列を持つ(さらに定理 19.12 より，ほとんどいたるところ各点ごとに収束する部分列を持つ)．(実際，これがレリッヒによって証明された元の主張である.)

証明 系 19.7 より $1 \leq r \leq p < \infty$ に対して $H_0^{1,p}(\Omega) \subset H_0^{1,r}(\Omega)$ なので $p < d$ の場合だけを考える．(つまりこの場合を示せばすべての $r < d$ と任意の $1 \leq q < \frac{dr}{d-r}$ で $H_0^{1,r}(\Omega)$ が $L^q(\Omega)$ にコンパクトに埋め込めることがわかる．各 $1 \leq q < \infty$ に対して $q < \frac{dr}{d-r}$ となる $r < d$ を探せるので，$H_0^{1,p}(\Omega) \subset H_0^{1,r}(\Omega)$ がすべての q で $L^q(\Omega)$ に埋め込めることが，$p \geq d$ の場合に確かめられる.)

まず $q = 1$ の場合を考える．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^{1,p}(\Omega)$ とし，

$$\|f_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq K \tag{22}$$

とする．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $L^1(\Omega)$ で全有界，つまり任意の $\varepsilon > 0$ に対して，有限個の

$u_1, \ldots, u_k \in L^1(\Omega)$ が存在して，各 $n \in \mathbb{N}$ に対してある $i \in \{1, \ldots, k\}$ で

$$\|f_n - u_i\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon \tag{23}$$

となることを示そう．これを示せば，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有限個の開球体

$$U_i := \{h \in L^1(\Omega) : \|h - u_i\|_{L^1} < \varepsilon\}$$

で被覆されることがわかる．そのときには，定理 7.39 より $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の閉包は $L^1(\Omega)$ でコンパクトなので，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は L^1 ノルムに関して収束する部分列を持つ．

まず任意の $n \in \mathbb{N}$ と $\varepsilon > 0$ に対して $H_0^{1,p}(\Omega)$ の定義より，$g_n \in C_0^1(\Omega)$ が存在して

$$\begin{aligned}\|f_n - g_n\|_{L^1(\Omega)} &\le C\|f_n - g_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &< \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned} \tag{24}$$

$g \in C_0^1(\Omega)$ に対して，合成積

$$g_h(x) = \frac{1}{h^d}\int_\Omega \rho(\frac{x-y}{h})g(y)dy$$

を考える．任意の $g \in C_0^1(\Omega)$ に対して

$$\begin{aligned}|g(x) - g_h(x)| &= \frac{1}{h^d}|\int_\Omega \rho(\frac{x-y}{h})(g(x) - g(y))dy| \\ &= |\int_{|z|\le 1} \rho(z)(g(x) - g(x - hz))dz| \\ &\quad \text{(19 章の計算を見よ)} \\ &\le \int_{|z|\le 1} \rho(z)\int_0^{h|z|} |\frac{\partial}{\partial r}g(x - r\omega)|drdz \left(\omega = \frac{z}{|z|}\right).\end{aligned}$$

x に関して積分することで

$$\begin{aligned}\int_\Omega |g(x) - g_h(x)|dx &\le \int_{|z|\le 1} \rho(z)h|z|\int_\Omega |Dg(x)|dxdz \\ &\quad (Dg = (D_1 g, \ldots D_d g)) \\ &\le h\int_\Omega |Dg(x)|dx\end{aligned} \tag{25}$$

得る．(22)，(24)より，ある K' が存在して

$$\|g_n\|_{W^{1,1}(\Omega)} \le C\|g_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le K' \tag{26}$$

が任意の n で成立する．

(25)より $h>0$ を十分小さく選ぶと，すべての $n\in\mathbb{N}$ で

$$\|g_n - g_{n,h}\|_{L^1(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{27}$$

さらに

$$|g_h(x)| = \frac{1}{h^d}|\int_\Omega \rho(\frac{x-y}{h})g(y)| \le \frac{1}{h^d}\sup_z|\rho(z)|\|g\|_{L^1(\Omega)} \tag{28}$$

$$|D_i g_h(x)| = \frac{1}{h^d}|\int_\Omega D_i\rho(\frac{x-y}{h})g(y)dy| \le \frac{1}{h^{d+1}}\sup|\frac{\partial}{\partial z^i}\rho(z)|\|g\|_{L^1(\Omega)}. \tag{29}$$

(28)，(29)を g_n に適用すると，(26)より

$$\|g_{n,h}\|_{C^1(\Omega)} \le C \tag{30}$$

ここで定数 C は h に依存するが，h は(27)を満たすように選んだ定数である．列 $(g_{n,h})_{n\in\mathbb{N}}$ はしたがって一様有界，同等連続なので，アルツェラ・アスコリの定理より一様収束する部分列を持つ．この部分列は $L^1(\Omega)$ でも収束し，$\{g_{n,h}: n\in\mathbb{N}\}$ の閉包は $L^1(\Omega)$ でコンパクトで，よって全有界．つまり有限個の $u_1,\ldots,u_k\in L^1(\Omega)$ が存在し各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，ある $i\in\{1,\ldots,k\}$ が存在して

$$\|g_{n,h} - u_i\|_{L^1(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{31}$$

(24), (27), (31)より $n\in\mathbb{N}$ に対して，ある $i\in\{1,\ldots k\}$ が存在して

$$\|f_n - u_i\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon.$$

これより $q=1$ の場合の(23)が確かめられた．

次に任意の $q<\frac{dp}{d-p}$ で $f\in H_0^{1,p}(\Omega)$ に対し

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^q(\Omega)} &\le \|f\|^{\lambda}_{L^1(\Omega)}\|f\|^{1-\lambda}_{L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)} \\ &\qquad \Big(\text{ここで}\frac{1}{q}=\lambda+(1-\lambda)(\frac{1}{p}-\frac{1}{d})\Big) \\ &\qquad (\text{系 19.8 より}) \\ &\le C\|f\|^{\lambda}_{L^1(\Omega)}\|Df\|^{1-\lambda}_{L^p(\Omega)} \qquad (\text{定理 20.15 より}).\end{aligned} \tag{32}$$

すでに $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が，部分列をとれば，$L^1(\Omega)$ で収束することは見た．よってこれ

はコーシー列で $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \geq N$ に対し

$$\|f_n - f_m\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon.$$

(22), (32) より

$$\|f_n - f_m\|_{L^q(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\lambda}.$$

したがって $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^q(\Omega)$ のコーシー列でもある．$L^q(\Omega)$ は完備なので (定理 19.11), 証明が完結する．□

20 章の演習

1）以下の関数のうちどれが弱微分可能か？（答えは d の値によって異なることに注意せよ！）

a）$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, f(x) := \|x\|.$

b）$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, f(x) := \begin{cases} \frac{x}{\|x\|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ の各成分.

c）$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} \log\|x\| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

d）$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} 1 & x^1 \geq 0 \\ -1 & x^1 < 0 \quad (x = (x^1, \dots, x^d)). \end{cases}$

e）$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{\sin^5 x} + 7x^9.$

2）α, k, p, d がどのような値のとき

$$\|x\|^{\alpha} \in W^{k,p}(U(0,1))$$

が成立するか？ $(U(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\})$.

3）$f, g \in H^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ とする．これらの空間は $L^2_{\text{loc.}}$ のときと同様に定義される．$f \cdot g$ が弱微分可能で

$$D(fg) = fDg + gDf$$

となることを示せ．（まず関数が $C^1(\Omega)$ に属している場合を考えよ.）

4）$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続，区分的に連続微分可能で $\sup|\psi'| < \infty$ とする．$f \in W^{1,p}(\Omega)$ とする．$\psi \circ f \in W^{1,p}(\Omega)$ で

$$D(\psi \circ f)(x) = \begin{cases} \psi'(f(x))Df(x) & \psi \text{ が } f(x) \text{ で微分可能}, \\ 0 & \text{それ以外}\ . \end{cases}$$

第 VI 部

変分法と楕円型偏微分方程式入門

第 21 章

ヒルベルト空間，弱収束

ヒルベルト空間とは，内積から導かれるノルムを持つバナッハ空間のことである．ヒルベルト空間の点列が弱収束するとは，点列とヒルベルト空間の任意の固定した元との内積が収束することである．弱収束がコンパクト性を持つことは重要である．これは無限次元ヒルベルト空間の普通の収束に関しては成立しない．特に，有界列は弱収束する部分列を持つ．

定義 21.1 実(複素)ヒルベルト空間 H とは以下の性質を満たす内積

$$(\cdot,\cdot):H\times H\to\mathbb{R}(\text{または}\ \mathbb{C})$$

が与えられている $\mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）上のベクトル空間のことである．

i) 任意の $x,y\in H$ で $(x,y)=(y,x)$, $((x,y)=\overline{(y,x)})$.

ii) $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y)=\lambda_1(x_1,y)+\lambda_2(x_2,y)\ \forall\,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}(\text{または}\ \mathbb{C})$, $x_1,x_2,y\in H$.

iii) $x\neq 0$ となる任意の $x\in H$ で $(x,x)>0$.

iv) H はノルム $\|x\|:=(x,x)^{1/2}$ に関して完備(つまり，任意のコーシー列が $\|\cdot\|$ に関する極限を H 内に持つ).

したがってヒルベルト空間はバナッハ空間であり(後に補題 21.2 で三角不等式を見る)，もちろんすべての有限次元ユークリッド空間，つまり $\mathbb{R}^d$ に普通の内積を入れたものはヒルベルト空間である．ヒルベルト空間の概念を導入することで，ユークリッド空間とユークリッド幾何を無限次元に拡張することが可能になる．我々にとって最も大切なヒルベルト空間は $L^2(\Omega)$ に内積

$$(f,g)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

を入れたものである．（上の内積の値はヘルダーの不等式より $f, g \in L^2(\Omega)$ に対して有限である．） より一般に，ソボレフ空間 $W^{k,2}(\Omega)$ に内積

$$(f,g)_{W^{k,2}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D_\alpha f(x) \cdot D_\alpha g(x)dx$$

を入れたものもヒルベルト空間である．これらの内積の入った $L^2(\Omega)$，$W^{k,2}(\Omega)$ が実際にヒルベルト空間であることは19章，20章の定理で完備性が示されていることからわかる．ここでは主に実ベクトル空間を考えるが，物理では複素ベクトル空間すなわち，$L^2(\Omega,\mathbb{C}) := \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, f,\ \mathrm{Im}\, f \in L^2(\Omega)\}$ に内積

$$(f,g)_{L^2(\Omega,\mathbb{C})} := \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx$$

を入れたものもまた重要である．実ヒルベルト空間と複素ヒルベルト空間は多くの点で類似している．

補題 21.2 以下の不等式がヒルベルト空間 H に対して成り立つ．

— シュヴァルツ (Schwarz) の不等式

$$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|. \tag{1}$$

等号は x と y が線形従属なときに成立する．

— 三角不等式

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|. \tag{2}$$

— 中線定理

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{3}$$

証明　(1) は $\lambda = \frac{-(x,y)}{\|y\|^2}$ に対して $\|x+\lambda y\|^2 \ge 0$ であることから，(2) は (1) より従う．(3) は計算により確かめられる．　□

定義 21.3 $x, y \in H$ （H はヒルベルト空間）は $(x, y) = 0$ を満たすとき直交するという．F が H の部分空間であれば

$$F^{\perp} := \{x \in H : (x, y) = 0 \ \forall \ y \in F\}$$

も H の部分空間である．

定理 21.4 F をヒルベルト空間 H の閉部分空間とする．$x \in H$ は

$$x = y + z, \qquad y \in F, z \in F^{\perp} \tag{4}$$

と書くことができ，またこの書き方は唯一通りである．

証明 実ヒルベルト空間の場合に証明を与える．複素ヒルベルト空間についても同様に証明できる．

$$d := \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

とし，$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ を最小列，すなわち

$$\|x - y_n\| \to d \tag{5}$$

となるものとする．(3) より

$$\begin{aligned} &4\|x - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 \\ &= 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2) \end{aligned} \tag{6}$$

を得る．y_n, y_m に対して $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in F$ なので (y_n) がコーシー列であることがわかり，H は完備なので極限を持つ．これを y とおく．F は閉集合なので $y \in F$ で $d = \|x - y\|$.

$z = x - y$ とおき，$z \in F^{\perp}$ を示す．$y' \in F, \alpha \in \mathbb{R}$ のとき $y + \alpha y' \in F$. よって

$$\begin{aligned} d^2 \leq \|x - y - \alpha y'\|^2 &= (z - \alpha y', z - \alpha y') \\ &= \|z\|^2 - 2\alpha(y', z) + \alpha^2\|y'\|^2. \end{aligned}$$

$\|z\| = d$，任意の $\alpha > 0$ に対して

$$|(y', z)| \leq \frac{\alpha}{2}\|y'\|^2.$$

よって

$$\forall\, y' \in F \text{ に対し}\quad (y', z) = 0$$

であり，$z \in F^{\perp}$ となる．

条件を満たす y が唯一つであることは，$\|x - y_1\| = d = \|x - y_2\|$ となる $y_1 \neq y_2$ があれば(6)より

$$\|x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\| < d$$

となり，d の最小性に矛盾することによりわかる．□

系 21.5 ヒルベルト空間 H の各閉部分空間 F に対して

$$\|\pi\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\pi x\|}{\|x\|} = 1 \tag{7}$$

$$\pi^2 = \pi \quad (\text{つまり } \pi \text{ は射影}) \tag{8}$$

$$\ker \pi = F^{\perp} \tag{9}$$

を満たす線形写像

$$\pi : H \to F$$

が唯一つ存在する．

証明　(4)のように $x = y + z$ と書き，

$$\pi x = y$$

とおく．主張のすべてはただちに従う．□

次にリース(Riesz)の表現定理を示す．

定理 21.6 L をヒルベルト空間 H 上の有界線形汎関数（つまり $L : H \to \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）が線形で

$$\|L\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|Lx|}{\|x\|} < \infty.)$$

とする．このとき唯一つの $y \in H$ が存在して

$$L(x) = (x, y)\ \forall\, x \in H \tag{10}$$

を満たす．さらに

$$\|L\| = \|y\|. \tag{11}$$

証明 $N := \ker L := \{x : Lx = 0\}$ とおく．$N = H$ のとき $y = 0$ が条件を満たす．$N \neq H$ のときを考える．N は閉集合なので，定理 21.4 より $z \neq 0, z \in H$ が存在して

$$(x, z) = 0 \ \forall\ x \in N.$$

よって $Lz \neq 0$, さらに $x \in H$ に対して

$$L(x - \frac{Lx}{Lz}z) = Lx - \frac{Lx}{Lz}Lz = 0.$$

これより $x - \frac{Lx}{Lz}z \in N$, したがって

$$(x - \frac{Lx}{Lz}z, z) = 0,$$

$$(x, z) = \frac{Lx}{Lz}\|z\|^2$$

であり

$$y := \frac{Lz}{\|z\|^2} \cdot z$$

とおくと

$$Lx = (x, y).$$

もし y_1, y_2 がこの性質を持つとすると

$$(x, y_1 - y_2) = 0 \quad \forall x.$$

よって，特に $x = y_1 - y_2$ とすると，$\|y_1 - y_2\|^2$ はゼロとなり，よって $y_1 = y_2$ がわかる．

さらに，シュヴァルツの不等式より

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, y)|}{\|x\|} \leq \|y\|.$$

一方

$$\|y\|^2 = (y, y) = Ly \leq \|L\| \cdot \|y\|.$$

これらすべてを併せて

$$\|y\| = \|L\|$$

を得る． □

定義 21.7 H をヒルベルト空間とする．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$，$x \in H$ が

$$(x_n, y) \to (x, y) \ \forall\, y \in H$$

を満たすとき $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は x に弱収束するといい，$x_n \rightharpoonup x$. と表す．

普通の意味で収束する列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は

$$|(x_n, y) - (x, y)| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y\| \quad ((1)\text{ より})$$

なので，弱収束する．

しかし以下に見るように弱収束することは，必ずしも普通の意味での収束を意味しない．ヒルベルト空間の普通の収束と弱収束を区別するために，前者を強収束という．

有限次元ユークリッド空間においては，弱収束は各成分の収束を意味するので，強収束と弱収束は同値である．

定理 21.8 ヒルベルト空間 H の任意の有界列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は弱収束する部分列を持つ．

証明 $\|x_n\| \leq M$ とする．適当な部分列 (x_{n_k}) と，ある $x \in H$ が存在し，x_n の張る H の線形部分空間 S の閉包 $\bar{S}$ に属する任意の y に対して $(x_{n_k}, y) \to (x, y)$ が成立することを見ればよい．実際，定理 21.4 より $y \in H$ は

$$y = y_0 + y_1, y_0 \in \overline{S}, y_1 \in \overline{S}^{\perp}$$

と書け，すべての n で $(x_n, y_1) = 0$ なので，上のように仮定してよい．

$\|x_n\| \leq M$ なので，固定した m に対して (x_n, x_m) の絶対値は n によらずに押さえられる．よって $((x_n, x_m))_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列を持つ．カントールの対角線論法より，(x_n) の部分列 (x_{n_k}) が存在して，すべての $m \in \mathbb{N}$ で (x_{n_k}, x_m) が $k \to \infty$ のとき収束する．

したがって $y \in S$ に対して (x_{n_k}, y) も収束する．$y \in \overline{S}$ のとき $y' \in S$ に

対して

$$
\begin{aligned}
|(x_{n_j}-x_{n_k},y)| \le& |(x_{n_j},y-y')|+|(x_{n_j}-x_{n_k},y')| \\
&+|(x_{n_k},y'-y)| \\
\le& 2M\|y-y'\|+|(x_{n_j}-x_{n_k},y')|.
\end{aligned}
$$

与えられた $\varepsilon>0$ に対して $y'\in S$ を $\|y'-y\|<\frac{\varepsilon}{4M}$ となるように選び，j，k を十分大にとると

$$|(x_{n_j}-x_{n_k},y')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$j,k\to\infty$ のとき $|(x_{n_j}-x_{n_k},y)|\to 0$ がすべての $y\in\overline{S}$ に対して成立する．

よって (x_{n_k},y) はコーシー列で，極限を持つ．

$$Ly:=\lim_{k\to\infty}(x_{n_k},y)$$

とおく．L は(1)と $\|x_n\|\le M$ より有界な線形汎関数である．

定理 21.6 より

$$(x,y)=Ly\,(\forall\ y\in\overline{S})$$

となる $x\in\overline{S}$ をとることができ，$y\in\overline{S}^{\perp}$ に対して $Ly=(x,y)=0$．よって x_{n_k} は x に弱収束する． □

系 21.9 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が x に弱収束するとする．このとき

$$\|x\|\le\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|.$$

（したがってノルムは弱収束に関して下半連続.） $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が x に収束するのは，x に弱収束し，さらに

$$\|x\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|$$

となるとき，またはそのときに限る．

証明

$$0\le(x_n-x,x_n-x)=(x_n,x_n)-2(x_n,x)+(x,x)$$

が成立する．$n\to\infty$ のとき $(x_n,x)\to(x,x)$ なので

$$0\le\liminf\|x_n\|^2-\|x\|^2.$$

$\|x\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|$ のとき，上記の考察より $\lim_{n\to\infty}(x_n - x, x_n - x) = 0$，したがって強収束する．逆に強収束のとき，ノルムが収束することは明らかで，また強収束であれば弱収束することもすでに見た．□

例　正規直交系 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$，つまり

$$(e_n, e_m) = \delta_{nm} \left(= \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \right)$$

を考える．すべての $x \in H$ が

$$x = \sum_n (x, e_n)e_n$$

と書けるとき正規直交系は完備であるという．例として $L^2((-\pi, \pi))$，関数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx (n \in \mathbb{N})$ を考えよう．

$$(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \delta_{mn}$$

$$(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = \delta_{mn}$$

$$(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$$

$$(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$

$$(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx = 0 \ \ (n \geq 1)$$

$$(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx = 0 \ \ (n \geq 1).$$

$L^2((-\pi, \pi))$ の正規直交系を

$$e_1 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_{2n} := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, e_{2n+1} := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx \ \ (n \geq 1)$$

で与える．この正規直交系は $L^2((-\pi,\pi))$ 関数のフーリエ級数展開を与える．後にラプラス作用素の固有値問題を考えるときは，別の正規直交系を考えることになる．

H を無限次元ヒルベルト空間，$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を H の正規直交系とする．(e_n) がゼロに弱収束することを見る．もし，そうでないとする．e_n の部分列をとってある $x \in H$ に対して，ある $\varepsilon > 0$ が存在して

$$|(x, e_n)| \geq \varepsilon \ (\forall\ n \in \mathbb{N}). \tag{12}$$

$(x, e_m)e_m$ は e_m の張る空間への x の射影なので，定理 21.4 より $x = \alpha e_m + f$, $(f, e_m) = 0$ と書ける．$(e_m, e_m) = 1$ なので $\alpha = (x, e_m)$．同様に

$$\sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n$$

は x の $e_1, \ldots, e_N$ の張る部分空間への上への射影である．したがって，(12) が成り立つと

$$\|x\|^2 = \|x - \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n\|^2 + \|\sum_{n=1}^{N}(x, e_n)e_n\|^2 \geq \sum_{n=1}^{N}(x, e_n)^2 \geq N\varepsilon^2.$$

よって(12)はありえない．これより $e_n \rightharpoonup 0$ を得る．

すべての n で $\|e_n\| = 1$ なので，系 21.9 の式で等号が成立することは期待できない．また，(e_n) は 0 に強収束(ノルムが収束)しない．このようにコンパクト性に関しては，弱収束が有限次元における収束の概念の適切な類似物である．

系 21.10 (バナッハ・サックス(Banach-Saks)) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ を $\|x_n\| \leq K$ (n によらない)となるものとする．このとき部分列 $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ と $x \in H$ が存在し

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_{n_j} \to x \text{ (ノルムの収束)} \quad (k \to \infty).$$

証明 x を弱収束する部分列 $(x_{n_i}) \subset (x_n)$ の極限(定理 21.8)とし

$$y_i := x_{n_i} - x$$

とおく．$y_i \rightharpoonup 0$ であり K' が存在して $\|y_i\| \leq K'$.

逐次 $y_{i_j} \in (y_i)$ を

$$|(y_{i_\ell}, y_{i_j})| \le \frac{1}{j} \quad (\ell < j)$$

となるように選ぶ．このようにできるのは，$y_i \rightharpoonup 0$ であり，したがって任意の $z \in H$ に対して $(z, y_i) \to 0$ なので，有限個の

$$y_{i_\ell} \in H \quad (\ell = 1, \ldots, j-1)$$

に対しても $(y_{i_\ell}, y_i) \to 0$ とできるからである．

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_{i_j}\|^2 &= \frac{1}{k^2}(\sum_{\ell,j=1}^{k}(y_{i_\ell}, y_{i_j})) \\
&= \frac{1}{k^2}(\sum_{j=1}^{k}((y_{i_j}, y_{i_j}) + 2\sum_{\ell=1}^{j-1}(y_{i_\ell}, y_{i_j}))) \\
&\le \frac{1}{k^2}(kK'^2 + 2\sum_{j=1}^{k} j \cdot \frac{1}{j}) \\
&\le \frac{K'^2 + 2}{k} \to 0 \ \ (k \to \infty).
\end{aligned}$$

これによって主張が確かめられた．□

さらに次が成り立つ．

補題 21.11 任意の弱収束列 $(x_n) \subset H$ は有界である．

証明　有界線形関数

$$L_n y := (x_n, y)$$

が $\{y : \|y\| \le 1\}$ 上一様有界であることを確かめればよい．これを示せば $\|x_n\| = (x_n, \frac{x_n}{\|x_n\|})$ が n によらない評価を持つことがわかる．

L_n は線形なので，これを見るには，ある球体上で一様有界であることを確かめればよい．このような球体が存在することを背理法で示す．もし，存在しないとする．$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は，いかなる球体上も有界でないので，閉球体 (K_i) の列で

$$K_i := \{y : \|y - y_i\| \le r_i\},$$
$$K_{i+1} \subset K_i$$
$$r_i \to 0$$

となるものと，$(x_{n_i}) \subset (x_n)$ で

$$|L_{n_i} y| > i \ (\forall\ y \in K_i) \tag{13}$$

となる部分列が存在する．(y_i) はコーシー列をなすので極限 $y_0 \in H$ が存在し，

$$y_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$$

となり，(13) より

$$|L_{n_i} y_0| > i \ \forall\ i \in \mathbb{N}.$$

これは (x_{n_i}) が弱収束すれば $L_{n_i} y_0$ は収束するので，矛盾である． □

系 21.12 A をヒルベルト空間の閉凸部分集合（つまり $x, y \in A \Longrightarrow tx + (1-t)y \in A$ が $0 \le \forall t \le 1$ で成り立つ）とする．例えば閉部分空間など．このとき A は弱収束に関して閉である．

証明 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ で (x_n) は $x \in H$ に弱収束するとする．補題 21.11 より列 (x_n) は有界で，系 21.10 より部分列 $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ で $\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_{n_j}$ が x に収束する．A は凸集合なのですべての k で $\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_{n_j} \in A$ であり，A は閉なので $x \in A$． □

21 章の演習

1） a） S をヒルベルト空間 H の閉凸部分集合，$x \in H$ とする．x までの距離が最小になる $y \in S$ が唯一つ存在する．

b） $F : H \to \mathbb{R}$ を連続線形，$\|F\| = 1$ とする．$F(y) = 1$ となる唯一つの $y \in \{x \in H : \|x\| = 1\}$ が存在する．

2） 有限次元ユークリッド空間では強収束と弱収束は同値であることを示せ．

3) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0([a,b]) \quad (a,b \in \mathbb{R})$ を有界列とする．(f_n) の部分列 $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ と $f \in L^2((a,b))$ が存在し

$$\int_a^b f_{n_k}(x)\varphi(x)dx \to \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

が任意の $\varphi \in C^0([a,b])$ で成り立つことを示せ．

4) $L : H \to K$ をヒルベルト空間間の連続線形写像とする．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ が $x \in H$ に弱収束するとき，$(Lx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Lx に弱収束することを示せ．L がコンパクト（定義 7.47 を参照）のとき Lx_n が Lx に強収束することを示せ．

5) H を無限次元ヒルベルト空間で正規直交系 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を持つとする．線形写像

$$L : H \to H$$

で

$$L(e_n) = ne_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

となるものが存在するか？

第22章

変分原理と偏微分方程式

［ディリクレ(Dirichlet)の原理とは適当なクラスの関数の中でディリクレ積分を最小にするものとして調和関数を探すことである．このアイデアを一般化し，汎関数を最小にする関数がオイラー・ラグランジュ(Euler-Lagrange)方程式の弱解となることを見る．いくつかの例について議論する．］

まず，以下に続く考察の基本となるアイデアをはっきりさせるために例を見よう．ここでの考察を後に一般化することは難しくはない．

この例で扱う偏微分方程式は，おそらく数学および物理における最も重要なもの，すなわちラプラス方程式である．

以下 Ω は $\mathbb{R}^d$ の有界開部分集合とする．関数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ は Ω でラプラス方程式

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x^1)^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x^d)^2} = 0$$

を満たすとき調和関数という．調和関数は，例えば複素関数論に現れる．$\Omega\subset\mathbb{C}$ で $z=x+iy\in\Omega$ とおく．$f(z)=u(z)+iv(z)$ を Ω 上の正則関数とすると，f はコーシー・リーマン(Cauchy-Riemann)微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

を満たす．正則関数は C^∞ なので(1)を微分し

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} = 0$$

を得る．同様に

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

も成り立つ．このように正則関数の実部と虚部は調和関数である．

逆に，二つの調和関数が(1)を満たすとき，共役であるといい，共役な調和関数の対は正則関数 $f = u + iv$ を与える．

(1)が成立するとき $(u(x,y), -v(x,y))$ を2次元渦なし非圧縮流体の速度ベクトル場と思うことができる．$d = 3$ のとき，調和関数は渦なし非圧縮流体の速度ベクトル場と思うこともできるが，(外部の引力や斥力を引き起こす電荷や，引力を引き起こす質点による)静電場，重力場，熱平衡状態における温度分布，弾性膜の平衡状態などの記述にも現れる．

調和関数における最も大切な問題はディリクレ問題，つまり，関数 $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ が与えられたとき

$$\Delta f(x) = 0 \quad (x \in \Omega) \tag{2}$$
$$f(x) = g(x) \quad (x \in \partial\Omega)$$

を満たす $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ を探すことである．

例えば，これは Ω で固定された膜の平衡状態を表している．

調和関数に関するディリクレ問題を解くにはいくつかの方法がある．最も大切で，一般的な方法はディリクレ原理と呼ばれるもので，ここでは，それを紹介する．

(2)がきちんと意味をなすためには，Ω と g にいくつかの仮定をおく必要がある．さしあたり $g \in W^{1,2}(\Omega)$ と仮定する．すでに Ω は $\mathbb{R}^d$ の有界開部分集合と仮定しておいた．境界条件，つまり $\partial\Omega$ で $f = g$ を調べていく過程で，さらにいくつかの条件を課す．

ディリクレ原理とは

$$\Delta f = 0 \quad \Omega\text{上}$$
$$f = g \quad \partial\Omega\text{上（ただし } f - g \in H_0^{1,2}(\Omega) \text{ の意味で）}$$

の解を，$v - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$ となる $v \in H^{1,2}(\Omega)$ の中でディリクレ積分

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2 \quad (\, Dv = (D_1 v, \ldots D_d v))$$

を最小にするものを探すことで見つけるという手法のことである．

この方法が本当にうまく行くことを確かめよう．

$$m := \inf\Big\{\frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2 : v \in H^{1,2}(\Omega), v - g \in H_0^{1,2}(\Omega)\Big\}$$

とおく．m を与えるような関数があって，その関数が調和であることを確かめなくてはならない．（記号：系 20.10 より $W^{1,2} = H^{1,2}$ である．以後この空間のことは $H^{1,2}$ と表す.）

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を最小列とする．つまり $f_n - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$ で

$$\int_\Omega |Df_n|^2 \to 2m$$

となるものとする．

系 20.16 より

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{L^2(\Omega)} &\le \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|f_n - g\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|g\|_{L^2(\Omega)} + c_1\|Df_n - Dg\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|g\|_{L^2(\Omega)} + c_1\|Dg\|_{L^2(\Omega)} + c_1\|Df_n\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le c_2 + c_1\|Df_n\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

ただし，ここで g を固定していることを使った．

一般性を失わずに

$$\|Df_n\|^2_{L^2(\Omega)} \le 2m + 1$$

とできる．これより

$$\|f_n\|_{H^{1,2}(\Omega)} \le n \text{ によらない定数}.$$

定理 21.8 より部分列を選ぶことで f_n は $f \in H^{1,2}(\Omega)$ に弱収束し，$f - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$ となる（系 21.12 より従う）．また系 21.9 より

$$\int_\Omega |Df|^2 \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |Df_n|^2 = 2m.$$

$\|f_n\|^2_{H^{1,2}}$ の残りの項に関しては，レリッヒの定理より（定理 20.20），部分列 (f_n) をとると，L^2 ノルムに関して収束するので $\int_\Omega |f|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n|^2$ となる．$f - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$ なので，m の定義より

$$\int_\Omega |Df|^2 = 2m.$$

さらに，各 $v \in H_0^{1,2}, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$m \le \int_\Omega |D(f+tv)|^2 = \int_\Omega |Df|^2 + 2t \int_\Omega Df \cdot Dv + t^2 \int_\Omega |Dv|^2.$$

（ここで $Df \cdot Dv := \sum_{i=1}^d D_i f \cdot D_i v$.）　$t = 0$ で t に関して微分すると，すべての $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ に対して

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_\Omega |D(f+tv)|^2 = 2\int_\Omega Df \cdot Dv.$$

ところで，上の計算により写像

$$E : H^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_\Omega |Df|^2$$

は微分可能で

$$DE(f)(v) = 2\int_\Omega Df \cdot Dv$$

となることもわかる．

定義 22.1 関数 $f \in H^{1,2}(\Omega)$ は

$$\int_\Omega Df \cdot Dv = 0 \quad (\forall\, v \in H_0^{1,2}(\Omega)) \tag{3}$$

を満たすとき弱調和関数またはラプラス方程式の弱解という．

明らかに，任意の調和関数は (3) を満たす．ディリクレの原理によって調和関数を得るには，(3) の解が 2 回連続微分可能であり，特に調和であることを示さなくてはならない．これは 23 章で示される．

しかし，ここではもっと一般の設定を扱う．

定義 22.2 $\varphi \in L^2(\Omega)$ とする．関数 $f \in H^{1,2}(\Omega)$ がポアソン (Poisson) 方程

式 $(\Delta f = \varphi)$ の弱解であるとは，任意の $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega Df \cdot Dv + \int_\Omega \varphi \cdot v = 0 \tag{4}$$

を満たすことである．

注意　与えられた境界値 g $(f - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$ という意味で$)$ を持つ(4)の解は，$w \in H^{1,2}(\Omega)$ で $w - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$ となるものの中で

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |Dw|^2 + \int_\Omega \varphi \cdot w$$

を最小にするものとして得られる．この積分値は境界値 g を固定したときに，下からポアンカレ(Poincaré)の不等式によって押さえられる．(系 20.16)．

与えられた境界値 $f - g \in H_0^{1,2}$ を持つ(4)の解を見つける別の方法は以下の通りである．

$w := f - g \in H_0^{1,2}$ とおくと，w は任意の $v \in H_0^{1,2}$ に対して

$$\int_\Omega Dw \cdot Dv = -\int_\Omega \varphi \cdot v - \int_\Omega Dg \cdot Dv \tag{5}$$

を満たす．

ポアンカレの不等式(系 20.16)は $H_0^{1,2}(\Omega)$ の内積を

$$((f, v)) := (Df, Dv)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega Df \cdot Dv$$

で与えてよいことを意味している．この内積により $H_0^{1,2}(\Omega)$ はヒルベルト空間となる．さらに

$$\left|\int_\Omega \varphi \cdot v\right| \leq \|\varphi\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} \leq c\|\varphi\|_{L^2} \cdot \|Dv\|_{L^2}$$

を系 20.16 より得る．したがって

$$Lv := -\int_\Omega \varphi \cdot v - \int_\Omega Dg \cdot Dv$$

は $H_0^{1,2}(\Omega)$ の有界線形汎関数である．

定理 21.6 より，

$$((w,v)) = Lv \quad (\forall\, v \in H_0^{1,2})$$

を満たす $w \in H_0^{1,2}(\Omega)$ が唯一つ存在し，この w が(5)の解を与える．

この議論は(4)の解が唯一つであることも示している．これは，以下のより一般的な結果からもわかる．

補題 22.3　$f_i, i = 1,2$ を $\Delta f_i = \varphi_i$ の弱解で $f_1 - f_2 \in H_0^{1,2}(\Omega)$ となるものとすると

$$\|f_1 - f_2\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le c\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

が成立する．特に $\Delta f = \varphi, f - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$ の弱解は g と φ によって唯一通りに決まる．

証明

$$\int_\Omega D(f_1 - f_2) \cdot Dv = -\int_\Omega (\varphi_1 - \varphi_2)v$$

が任意の $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ で成立し，よって特に

$$\begin{aligned}\int_\Omega D(f_1 - f_2) \cdot D(f_1 - f_2) &= -\int_\Omega (\varphi_1 - \varphi_2)(f_1 - f_2) \\ &\le \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)}\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le c\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)}\|Df_1 - Df_2\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

が系 20.16 より成り立つ．結果として

$$\|Df_1 - Df_2\|_{L^2(\Omega)} \le c\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)}$$

を得る．主張は系 20.16 を再び用いることで得られる．　□

このようにポアソンの方程式の弱解が存在して，唯一つであることは簡単な方法で示せる．

正則性理論の目的は(十分に良い振る舞いをする φ に対して)弱解 f が C^2 級であること，つまり，$\Delta f = \varphi$ の古典解であることを示すことにある．特に $\Delta f = 0$ の解は $C^\infty(\Omega)$ である．

さらに，例えば $\partial\Omega$ が C^∞ で——意味は明らかにしなくてはならないが——$g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ のとき，どのような意味で，境界条件 $f - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$ が実現されているのかを考えなくてはいけない．この場合 $\Delta f = 0$ の解は C^∞ 級で，任意の $x \in \partial\Omega$ で $f(x) = g(x)$ が成立する．

上のアイデアの一般化を試みる．このため，まず上でのアイデアの要点をまとめよう．

ディリクレ積分を最小にするため，まず有界最小列が $H^{1,2}$ に存在することを見る．これより弱収束列を選ぶことができる．ディリクレ積分は弱収束に関して下半連続なのでこの列の極限は最小値を与える．この最初のステップで最小値を与える関数の存在がわかる．次の大切な観察はこの最小値を与える関数は，少なくとも弱い意味で偏微分方程式を満たさなくてはならない．

ここで実数値関数 H の適当な条件下に変分問題

$$I(f) := \int_\Omega H(x, f(x), D(f(x)))dx \to \min$$

を考える．ただし，Ω は常に $\mathbb{R}^d$ の有界，開部分集合とし f は $H^{1,2}(\Omega)$ を動くものとする．同様のことが $H^{1,p}(\Omega)$ でも考えられるが，本書では弱収束の概念を一般のバナッハ空間ではなくヒルベルト空間でのみ定義した．

定理 22.4 $H : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を非負で，第一座標に関して可測，第二座標について凸，すなわち $H(x, tp + (1-t)q) \le tH(x,p) + (1-t)H(x,q)$ がすべての $x \in \Omega$, $p, q \in \mathbb{R}^d$, $0 \le t \le 1$ で成立するとする．

$f \in H^{1,2}(\Omega)$ に対して

$$I(f) := \int_\Omega H(x, Df(x))dx \le \infty$$

とおく．このとき

$$I : H^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

は凸，下半連続（強収束に関して，つまり $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $H^{1,2}$ で f に収束すれば

$$I(f) \le \liminf_{n\to\infty} I(f_n))$$

である．

(H は第二座標に関して連続(下を見よ)Df は可測なので，$H(x, Df(x))$ もまた可測であり(系 17.12 より)，$I(f)$ はちゃんと定義できる.)

証明　積分は線形なので，I の凸性は H の凸性より従う．実際 $f, g \in H^{1,2}(\Omega), 0 \le t \le 1$ とすると，

$$\begin{aligned} I(tf + (1-t)g) &= \int_\Omega H(x, tDf(x) + (1-t)Dg(x))dx \\ &\le \int_\Omega \{tH(x, Df(x)) + (1-t)H(x, Dg(x))\}dx \\ &= tI(f) + (1-t)I(g). \end{aligned}$$

後は下半連続性を示せばよい．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $H^{1,2}$ で f に収束するとする．部分列をとることで $\liminf_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$ としてよい．さらに部分列をとることで Df_n はほとんどいたるところ各点ごとに Df に収束する．これは，定理 19.12 と Df_n が L^2 で Df に収束することより従う．H は第二座標に関して連続なので(補題 22.5 を見よ)，$H(x, Df_n(x))$ は Ω のほとんどいたるところ各点ごとに $H(x, Df(x))$ に収束する．$H \ge 0$ と仮定したのでファトウの補題が適用でき，

$$\begin{aligned} I(f) = \int_\Omega H(x, Df(x))dx &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} H(x, Df_n(x))dx \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega H(x, Df_n(x))dx \\ &= \liminf_{n\to\infty} I(f_n) \end{aligned}$$

を得る．(最初に部分列を選んで $\lim I(f_n) = \liminf I(f_n)$ としたので $\liminf I(f_n)$ は次に部分列を選んだときの選び方によらない.) これにより下半連続性が示せた．　□

さらに以下の事実を補足しておく．

補題 22.5 $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が凸であれば φ は連続．

証明　差 $|\varphi(y+h) - \varphi(y)|$ を $h \to 0$ のとき評価する．$\ell := \frac{h}{|h|}$ ($h \neq 0$ と仮

定してよい) $t \in [0,1]$ を

$$h = (1-t)\ell$$

となるように選ぶ．凸性より

$$\varphi(ty + (1-t)(y+\ell)) \le t\varphi(y) + (1-t)\varphi(y+\ell)$$

$$\varphi(y+h) \le t\varphi(y) + (1-t)\varphi(y+\ell).$$

よって

$$\varphi(y+h) - \varphi(y) \le \frac{1-t}{t}(-\varphi(y+h) + \varphi(y+\ell)). \tag{6}$$

φ の凸性より

$$\varphi(y) \le t\varphi(y+h) + (1-t)\varphi(y-t\ell).$$

よって

$$\varphi(y+h) - \varphi(y) \ge \frac{1-t}{t}(\varphi(y) - \varphi(y-t\ell)). \tag{7}$$

ここで h を 0 に近づけると $t \to 1$ となる．(6)，(7) より φ の y における連続性を得る． □

次に以下を証明しよう．

補題 22.6 A をヒルベルト空間の凸部分集合とし，$I : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が凸，下半連続であれば，弱収束に関しても下半連続．

証明 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ が $f \in A$ に弱収束するとする．

$$I(f) \le \liminf_{n\to\infty} I(f_n) \tag{8}$$

を示す．部分列を選ぶことで $I(f_n)$ が収束するとしてよい．

$$\liminf_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) =: \omega. \tag{9}$$

さらに部分列をとることで，バナッハ・サックスの補題(系 21.10)より，

$$g_k := \frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k} f_{N+\nu}$$

が $k \to \infty$ のとき，すべての $N \in \mathbb{N}$ に対して f に強収束する，

I の凸性より

$$I(g_k) \leq \frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k} I(f_{N+\nu}). \tag{10}$$

ここで $\varepsilon > 0$ に対して N を十分大きくとり，すべての $\nu \in \mathbb{N}$ に対して

$$I(f_{N+\nu}) < \omega + \varepsilon$$

が成立するようにする．(10) より

$$\limsup_{k\to\infty} I(g_k) \leq \omega.$$

I の強収束に関する下半連続性より

$$I(f) \leq \liminf_{k\to\infty} I(g_k) \leq \limsup_{k\to\infty} I(g_k) \leq \omega = \liminf_{n\to\infty} I(f_n).$$

これにより (8) が確かめられた．　□

ここで次の重要な結果を見る．

系 22.7　$H : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を非負で第一座標に関して可測，第二座標に関して凸とする．$f \in H^{1,2}(\Omega)$ に対して

$$I(f) := \int_\Omega H(x, Df(x))dx$$

とおくと，I は $H^{1,2}$ で弱収束に関して下半連続．

A を $H^{1,2}(\Omega)$ の閉凸部分集合とする．有界最小列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ が存在したとする．すなわち

$$I(f_n) \to \inf_{g\in A} I(g), \quad \|f\|_{H^{1,2}} \leq K$$

とする．このとき I は A で最小値をとる．つまり $f \in A$ が存在して

$$I(f) = \inf_{g\in A} I(g).$$

証明　下半連続性は定理 22.4 と補題 22.6 より従う．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を有界最小列とする．定理 21.8 より，部分列をとることで f_n は f に弱収束し，系 21.12 より f は A に属する．弱下半連続性より

$$I(f) \leq \liminf_{n\to\infty} I(f_n) = \inf_{g\in A} I(g)$$

であり，明らかに $\inf_{g\in A} I(g) \leq I(f)$ なので主張が従う． □

注意　1）系 22.7 において，H は x と $Df(x)$ にのみより $f(x)$ にはよらないことに注意する．実際，一般の場合の

$$I(f) = \int_{\Omega} H(x, f(x), Df(x))dx$$

については，H に関する適当な仮定のもとでの下半連続性の結果があるが，証明は非常に難しい．唯一の例外は以下のものである．

$H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を第一座標に関して可測で，第二，第三座標に関して凸であるとする．つまり $x \in \Omega, f, g \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{R}^d, 0 \leq t \leq 1$ に関して

$$H(x, tf + (1-t)g, tp + (1-t)q) \leq tH(x, f, p) + (1-t)H(x, g, q)$$

となるとする．系 22.7 の結果が

$$I(f) := \int_{\Omega} H(x, f(x), Df(x))dx$$

に対しても成立する，この結果の証明は系 22.7 の証明と同様である．

2）以下の理由で以上の考察に関しては弱収束は適切な概念である．ここで必要な収束の概念は，一方で下半連続性を満たさなくてはならないので，可能な限り強くなくてはいけない．一方，任意の有界列は収束する部分列を含んでいるようにしたいので，収束は可能な限り弱いものでなくてはいけない．弱収束はこの二つの要求を同時に満たすものである．

例　重要な例を見る．

$a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}(i, j = 1, \ldots, d,)$ を可測関数で，

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi^i\xi^j \geq \lambda|\xi|^2 \tag{11}$$

が任意の $x \in \Omega$, $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^d) \in \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$ に対して成立するものとする．

条件(11)を楕円性という.

$f \in H^{1,2}(\Omega)$ に対して

$$I(f) := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) D_i f(x) D_j f(x) dx$$

を考える.

さらに

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\substack{x\in\Omega \\ i,j=1,\dots d}} |a_{ij}(x)| \leq m \tag{12}$$

と仮定する. $I(f) < \infty$ がすべての $f \in H^{1,2}(\Omega)$ で成立する.

(11)と(12)によって

$$\lambda \int_{\Omega} |Df(x)|^2 dx \leq I(f) \leq md \int_{\Omega} |Df(x)|^2 dx \tag{13}$$

が成り立つ.

ここで

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)(D_i f(x) D_j g(x) + D_j f(x) D_i g(x)) dx$$

が $H^{1,2}(\Omega)$ 上の双線形対称半正定値($\langle f, f \rangle \geq 0$ がすべての f で成り立つ)であることに注意する. 特にシュヴァルツの不等式が成り立つ.

$$\langle f, g \rangle \leq I(f)^{\frac{1}{2}} \cdot I(g)^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

I が凸であることは容易にわかる.

$$\begin{aligned} I(tf + (1-t)g) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) (t^2 D_i f(x) D_j f(x) \\ + t(1-t)(D_i f(x) D_j g(x) + D_j f(x) D_i g(x)) \\ + (1-t)^2 D_i g(x) D_j g(x)) dx. \end{aligned}$$

よって

$$
\begin{aligned}
I(tf+(1-t)g) &= t^2 I(f) + 2t(1-t)\langle f,g\rangle + (1-t)^2 I(g)\\
&\le t^2 I(f) + 2t(1-t) I(f)^{\frac{1}{2}} I(g)^{\frac{1}{2}} + (1-t)^2 I(g) \quad \text{((14) より)}\\
&\le t^2 I(f) + t(1-t)(I(f)+I(g)) + (1-t)^2 I(g)\\
&= tI(f) + (1-t)I(g).
\end{aligned}
$$

最後に，$H_0^{1,2}(\Omega)$ に制限すると I の最小列は有界である．つまり $f \in H_0^{1,2}(\Omega)$ に対してポアンカレの不等式（系 20.16）が成り立つ．すなわち，

$$
\begin{aligned}
\|f\|^2_{H^{1,2}(\Omega)} &\le c \int_\Omega |Df(x)|^2 dx \quad (c \text{ は定数}) \qquad (15)\\
&\le \frac{c}{\lambda} I(f) \quad \text{((13) より)}.
\end{aligned}
$$

これより最小列は $H^{1,2}(\Omega)$ で有界である．

一般に，固定した $g \in H^{1,2}(\Omega)$ に対して

$$
A_g := \{f \in H^{1,2}(\Omega) : f - g \in H_0^{1,2}(\Omega)\}
$$

を考える．A_g は閉凸で，$f \in A_g$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{H^{1,2}(\Omega)} &\le \|f-g\|_{H^{1,2}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1,2}(\Omega)}\\
&\le \left(\frac{c}{\lambda} I(f-g)\right)^{\frac{1}{2}} + \|g\|_{H^{1,2}(\Omega)} \quad (f-g \in H_0^{1,2}(\Omega) \text{ なので})\\
&\le \left(\frac{c}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} (I(f)^{\frac{1}{2}} + I(g)^{\frac{1}{2}}) + \|g\|_{H^{1,2}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

最後の不等式では $I(f)^{\frac{1}{2}} = \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$ に関するシュヴァルツの不等式から導かれる三角不等式を使う．g は固定されているので，I の A_g における最小列の $H^{1,2}$ ノルムもまた有界である．

系 22.7 より I は A_g で最小値をとる．つまり $g \in H^{1,2}(\Omega)$ に対して $f-g \in H_0^{1,2}(\Omega)$ となるような $f \in H^{1,2}(\Omega)$ が存在して，

$$
I(f) = \inf\{I(h) : h \in H^{1,2}(\Omega), h-g \in H_0^{1,2}(\Omega)\}
$$

を満たす．これはディリクレ積分の対応する結果の一般化である．同様に，与えられた $\varphi \in L^2(\Omega)$ に対して

$$
J(f) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) D_i f(x) D_j f(x) + \varphi(x) f(x)\Big) dx
$$

の場合を取り扱うことができ，与えられた境界条件を満たす最小値を与える f が存在することが確かめられる．

しかしながら，すべての変分問題が最小値をとるとは限らない．

例　1） $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ に対して

$$I(f) := \int_{-1}^{1} (f'(x))^2 x^4 dx$$

を境界条件 $f(-1)=-1, f(1)=1$ で考える．

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & -1 \le x < -\frac{1}{n} \\ nx & -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

を考えよ． $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = 0$ だが任意の f で $I(f) > 0$. よって $I(f)$ の与えられた境界条件を持つ最小値をとる f は存在しない．

2） 次に境界値の実現の問題に係わる例を考えよう．

$\Omega := U(0,1)\backslash\{0\} = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < \|x\| < 1\}, d \ge 2$ とおく．

$$g(x) = 0 \quad (\|x\| = 1),$$
$$g(0) = 1$$

となる $g \in C^1(\overline{\Omega})$ をとる．ディリクレ積分を $A_g = \{f \in H^{1,2}(\Omega) : f - g \in H_0^{1,2}(\Omega)\}$ 上最小にしたい． $0 < \varepsilon < 1$, $(r = \|x\|)$ に対して

$$f_\varepsilon(r) := \begin{cases} 1 & 0 \le r \le \varepsilon \\ \frac{\log(r)}{\log(\varepsilon)} & \varepsilon < r \le 1 \end{cases}$$

とおく．20章で与えた公式を使うと $f_\varepsilon(r) - g$ は $H_0^{1,2}(\Omega)$ に属し，

$$\int_\Omega |Df_\varepsilon(r)|^2 dx = \frac{1}{(\log\varepsilon)^2} \int_{\varepsilon \le r \le 1} \frac{1}{r^2} dx$$

$$= \frac{d\omega_d}{(\log\varepsilon)^2} \int_\varepsilon^1 \frac{r^{d-1}}{r^2} dr \quad \text{（定理 13.21）}$$

$$= \begin{cases} \frac{2\pi}{\log\frac{1}{\varepsilon}} & d = 2 \\ \frac{1}{(\log\varepsilon)^2}\frac{d\omega_d}{d-2}(1-\varepsilon^{d-2}) & d > 2. \end{cases}$$

これより

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |Df_\varepsilon|^2 = 0$$

となるので

$$\inf\{\int_\Omega |Df|^2, f \in A_g\} = 0.$$

定石のポアンカレの不等式（系 20.16）より最小列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_g$ に対し

$$\|f_n\|_{H^{1,2}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

これより f_n は $H^{1,2}$ でゼロに収束する．極限 $f \equiv 0$ は与えられた境界条件 $f(0) = 1$ をとらない．このようなことが起こる理由はディリクレ積分を最小にするときに，孤立点があまりに小さな役割しか果たさないことにある．後に

$$h : B(0,1) \to \mathbb{R},\ \Delta h(x) = 0\ (0 < \|x\| < 1),$$
$$h(x) = 0\ (\ \|x\| = 1),\quad h(0) = 1$$

となるような h は存在すらしないことを見る．（定理 24.4 の直後の例を見よ.）

今見た現象を抽象的に述べることも容易である．

定義 22.8 Ω を $\mathbb{R}^d$ の開部分集合とし，$K \subset \Omega$ をコンパクトとする．K の Ω に関するキャパシティを

$$\mathrm{cap}_\Omega(K) := \inf\{\int_\Omega |Df|^2 : f \in H_0^{1,2}(\Omega), (K \text{ 上})\ f \ge 1\ \}$$

で定義する．$\mathbb{R}^d$ の孤立点のキャパシティは $d \geq 2$ のときゼロになる．

一般に

定理 22.9 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合，$K \subset \Omega$ をコンパクトで $\mathrm{cap}_\Omega(K) = 0$ となるものとする．ディリクレの原理は

$$\begin{aligned} f : \overline{\Omega \backslash K} &\to \mathbb{R} \\ \Delta f(x) &= 0 \ (x \in \Omega \backslash K), \\ f(x) &= 0 \ (x \in \partial\Omega), \\ f(x) &= 1 \ (x \in \partial K) \end{aligned}$$

の解を与えない． □

任意の $A \subset \Omega$ に対して

$$\mathrm{cap}_\Omega(A) := \sup_{\substack{K \subset A \\ K\ \text{コンパクト}}} \mathrm{cap}\ (K)$$

と定義する．（A として，例えば $\mathrm{vol}\,(A) = \infty$ をとると A 上で $f \geq 1$ となるような $f \in H_0^{1,2}(\Omega)$ は存在しないので定義 22.8 のように直接キャパシティを定義することはできない.）

変分問題の最小値の存在するための必要条件であるオイラー・ラグランジュ微分方程式を導こう．

定理 22.10 $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を，第一座標に関して可測で，他の二変数に関して微分可能であるとする．$f \in H^{1,2}(\Omega)$ に対して

$$I(f) := \int_\Omega H(x, f(x), Df(x))dx$$

と定義する．定数 c_1, c_2, c_3 が存在して

$$|H(x, f, p)| \leq c_1|p|^2 + c_2|f|^2 + c_3 \tag{16}$$

が，ほとんどすべての $x \in \Omega$，$f \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^d$ に対して成立すると仮定する．（したがって $I(f)$ は $f \in H^{1,2}(\Omega)$ に対して有限.）

(i) $A \subset H^{1,2}(\Omega)$ とし，$f \in A$ は

$$I(f) = \inf\{I(g) : g \in A\}$$

を満たすものとする．また A は，各 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して $t_0 > 0$ が存在して

$$f + t\varphi \in A \quad (|t| < t_0 \text{ となる } \forall t \text{ に対して}) \tag{17}$$

となるものとする．また H を，ほとんどすべての x と任意の f, p に対して

$$|H_f(x, f, p)| + \sum_{i=1}^{d} |H_{p_i}(x, f, p)| \le c_4|p|^2 + c_5|f|^2 + c_6 \tag{18}$$

となるものとしよう．ただしここで c_4, c_5, c_6 は定数で，添え字は偏微分を表し，$p = (p_1, \ldots p_d)$ である．このとき，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，

$$\int_\Omega \{H_f(x, f(x), Df(x))\varphi(x) + \sum_{i=1}^{d} H_{p_i}(x, f(x), Df(x))D_i\varphi(x)\}dx = 0 \tag{19}$$

が成立する．

(ii) (i) と同じ仮定で，さらに任意の $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$ に対して，t_0 が存在して (17) が成立すると仮定する．さらに (18) のかわりに不等式

$$|H_f(x, f, p)| + \sum_{i=1}^{d} |H_{p_i}(x, f, p)| \le c_7|p| + c_8|f| + c_9 \tag{20}$$

が定数 c_7, c_8, c_9 に対して成り立つとする．このとき (19) がすべての $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$ で成立する．

(iii) (i) と同様の仮定で，H をすべての変数に関して連続微分可能とする．f が二回連続微分可能であれば

$$\sum_{i,j=1}^{d} H_{p_i p_j}(x, f(x), Df(x)) \cdot \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{d} H_{p_i f}(x, f(x), Df(x)) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{d} H_{p_i x^i}(x, f(x), Df(x)) - H_f(x, f(x), Df(x)) = 0. \tag{21}$$

もしくは，より簡単に

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{d}{dx^i}(H_{p_i}(x, f(x), Df(x)) - H_f(x, f(x), Df(x)) = 0 \tag{22}$$

と表す(ここで $\frac{d}{dx^i}$ を $\frac{\partial}{\partial x^i}$ と混同しないこと！)．

定義 22.11 方程式(21)は変分問題 $I(f) \to \min$ のオイラー・ラグランジュ(Euler-Lagrange)方程式と呼ばれる．

方程式(21)は最初オイラー(Euler)によって $d = 1$ の場合に差分方程式で近似する方法で導かれ．ラグランジュ(Lagrange)によって一般の場合に対して，ここで述べた方法で導かれた．

定理 22.10 の証明

(i)

$$I(f) \leq I(f + t\varphi) \quad (\ |t| < t_0) \tag{23}$$

である．

$$I(f + t\varphi) = \int_{\Omega} H(x, f(x) + t\varphi(x), Df(x) + tD\varphi(x))dx.$$

$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ なので，φ と $D\varphi$ は有界で，定理 16.10 を適用でき，(16)，(18) より $I(f + t\varphi)$ は $|t| < t_0$ となる t で微分可能で

$$\frac{d}{dt}I(f+t\varphi)=\int_\Omega\{H_f(x,f(x)+t\varphi(x),Df(x)+tD\varphi(x))\varphi(x)$$
$$+\sum_{i=1}^d H_{p_i}(x,f(x)+t\varphi(x),Df(x)+tD\varphi(x))\cdot D_i\varphi(x)\}dx.$$

(23)より

$$0=\frac{d}{dt}I(f+t\varphi)_{|t=0}$$
$$=\int_\Omega\{H_f(x,f(x),Df(x))\varphi(x)+\sum_{i=1}^d H_{p_i}(x,f(x),Df(x))\cdot D_i\varphi(x)\}dx.$$

これより(i)を得る．

(20)が成立すると，$\varphi\in H_0^{1,2}(\Omega)$ のとき t に関して積分下で微分でき，微分して得られた被積分関数の絶対値は

$$(c_7|Df(x)+tD\varphi(x)|+c_8|f(x)+t\varphi(x)|+c_9)(|\varphi(x)|+|D\varphi(x)|)$$

で押さえられる．シュヴァルツの不等式より，積分は

$$c\|f+t\varphi\|_{H^{1,2}}\cdot\|\varphi\|_{H^{1,2}}\,(c\text{ は定数})$$

で押さえられる．したがって定理 16.10 が再び適用でき，積分下で微分をすることを正当化できる．よって(ii)が従う．

(21)の証明に関して，連続微分可能を仮定したので各 $x\in\Omega$ に対して近傍 $U(x)$ が存在し $H_{p_ip_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}, H_{p_if}\frac{\partial f}{\partial x^i}$，$H_{p_ix^i}$ が有界であることに注意しよう．

$\varphi\in C_0^\infty(U(x))$ に対して(19)を部分積分すると

$$0=\int_\Omega\{H_f(x,f(x),Df(x))-\sum_{i,j=1}^d H_{p_ip_j}(x,f(x),Df(x))\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial f(x)}{\partial x^j})$$
$$-\sum_{i=1}^d H_{p_if}(x,f(x),Df(x))\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)-\sum_{i=1}^d H_{p_ix^i}(x,f(x),Df(x))\}\varphi(x)dx.$$

これが任意の $\varphi\in C_0^\infty(U(x))$ で成立するので系 19.19 より，{　} の中は $U(x)$ でゼロになり，これが任意の $x\in\Omega$ に対して成立するので(21)が Ω で成立する． □

注意　ソボレフの埋め込み定理より(16)式の $c_2|f|^2$ を $d>2$ のときは $c_2|f|^{\frac{2d}{d-2}}$ で，$d=2$ のときは任意の $q<\infty$ に対して $c_2|f|^q$ で置き換えることができる．また(18)式の $c_5|f|^2$ なども同様に置き換えることができる．(ただし，本書ではソボレフの埋め込み定理は $H_0^{1,2}$ の場合のみを扱い，$H^{1,2}$ の場合を扱ってないので，ここで直接適用することはできない．)

より一般の変分問題をベクトル値関数について考えることもできる．

$$H:\Omega\times\mathbb{R}^c\times\mathbb{R}^{dc}\to\mathbb{R}$$

が与えられたとし，$f:\Omega\to\mathbb{R}^c$ に対して

$$I(f):=\int_\Omega H(x,f(x),Df(x))dx\to\min$$

を考える．この場合オイラー・ラグランジュ微分方程式は

$$\sum_{i=1}^d\frac{d}{dx^i}(H_{p_i^\alpha}(x,f(x),Df(x)))-H_{f^\alpha}(x,f(x),Df(x))=0\ (\alpha=1,\ldots c),$$

または

$$\sum_{i,j=1}^d\sum_{\beta=1}^c H_{p_i^\alpha p_j^\beta}(x,f(x),Df(x))\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}f^\beta$$
$$+\sum_{\beta=1}^c\sum_{i=1}^d H_{p_i^\alpha f^\beta}(x,f(x),Df(x))\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}$$
$$+\sum_{i=1}^d H_{p_i^\alpha x^i}(x,f(x),Df(x))-H_{f^\alpha}(x,f(x),Df(x))=0\quad(\alpha=1,\ldots,c)$$

と書ける．この場合は**偏微分方程式系**を得る．

これ以降この章では H は常に C^2 級であるとする．

例　いくつかの例を見よう

1）$a,b\in\mathbb{R},\ f:[a,b]\to\mathbb{R},$ に対して f のグラフの弧長を最小にしたい．つまり $(x,f(x))\subset\mathbb{R}^2$ に対して

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \to \min$$

を最小にしたい．オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \\ &= \frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} - \frac{f'(x)^2 f''(x)}{[1+f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

よって

$$f''(x) = 0. \tag{24}$$

もちろん，(24)の解は直線である．以下，これが境界条件 $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ に対する最小値を与える．

2) フェルマーの原理とは光線は二点を結ぶすべての経路の中で最も時間のかからない道をとるというものである．均質でない 2 次元媒体のなかを進む光線のスピードが $\gamma(x, f)$ で与えられるとき，光線の経路は変分問題

$$I(f) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\gamma(x, f(x))}dx \to \min$$

によって求めることができる．オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{\gamma(x, f(x))\sqrt{1+f'(x)^2}} + \frac{\gamma_f}{\gamma^2}\sqrt{1+f'(x)^2} \\ &= \frac{f''(x)}{\gamma\sqrt{1+f'(x)^2}} - \frac{(f'(x))^2 f''(x)}{\gamma(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\gamma_x}{\gamma^2}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \\ &\quad - \frac{\gamma_f}{\gamma^2}\frac{f'(x)^2}{\sqrt{1+f'(x)^2}} + \frac{\gamma_f}{\gamma^2}\sqrt{1+f'(x)^2}. \end{aligned}$$

つまり

$$0 = f''(x) - \frac{\gamma_x}{\gamma}f'(x)(1+f'(x)^2) + \frac{\gamma_f}{\gamma}(1+f'(x)^2). \tag{25}$$

明らかに例 2 の特殊な場合が例 1 である．

3）最短降下線の問題は先の例の特殊な場合である．ここで 2 点 $(x_0, 0)$, (x_1, y_1) は粒子の動く道で結ばれる．摩擦はないとし，y 軸方向に重力がかかっているときに粒子がとる道は最短経路をとる．

重力による加速度を g とおくと，高さ y における粒子のスピードは $(2gy)^{\frac{1}{2}}$ なので，$y = f(x)$ まで落下するのに要する時間は

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{2gf(x)}}dx$$

で与えられる．境界条件 $f(x_0) = 0, f(x_1) = y_1$ のもとで問題 $I(f) \to$ min を考えたい．$\gamma = \sqrt{2gf(x)}$ とおくと，(25)式は

$$0 = f''(x) + (1 + f'(x)^2)\frac{1}{2f(x)} \tag{26}$$

となる．(26)式を具体的に解こう．被積分関数

$$H(f(x), f'(x)) = \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{2gf(x)}}$$

を考える．オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dx}H_p - H_f = 0$$

より，H は表面的上 x によらないので

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f' \cdot H_p - H) &= f'' \cdot H_p + f'\frac{d}{dx}H_p - H_p \cdot f'' - H_f \cdot f' \\ &= f'(\frac{d}{dx}H_p - H_f) = 0.\end{aligned}$$

よって $f' \cdot H_p - H \equiv c \equiv$ 定数.

これより f' は関数 f，c によって表すことができる．$f' \neq 0$ の場合，逆関数定理より $f' = \varphi(f, c)$ とおくと

$$x = \int \frac{df}{\varphi(f,c)}$$

を得る．我々の場合は

$$c = f' \cdot H_p - H = -\frac{1}{\sqrt{2gf(1+f'^2)}}$$

なので

$$f' = \pm\sqrt{\frac{1}{2gc^2 f} - 1}.$$

$2gc^2 f = \frac{1}{2}(1-\cos t)$ とおき $f' = \sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$，よって

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{df}{f'} = \int \frac{1-\cos t}{\sin t}\frac{df}{dt}dt \\ &= \frac{1}{4gc^2}\int (1-\cos t)dt = \frac{1}{4gc^2}(t-\sin t) + c_1. \end{aligned} \tag{27}$$

これより f，x は t の関数として表せる．(27)式を $t = t(x)$ の形に解き，これを f に関する方程式に代入することで $f(x)$ を得る．

前の例で常微分方程式を解く重要な方法を学んだ．つまり x, y, p の式で，微分方程式の解を代入すると独立変数 x の関数としては定数となる式を見つける．この式が定数であることを用いて x，$f(x)$ を媒介変数の関数として求めるという方法である．

H が従属変数 f によらないときにも同様のことができる．この場合には，オイラー・ラグランジュ方程式は単に

$$\frac{d}{dx}H_p = 0$$

で与えられ，$H_p =$ 定数 なので f' が求まり，ついで x，$f(x)$ が積分により求まる．

上に挙げた例はすべて，考えられる状況の中で最も簡単な場合である．つまり一独立変数，一従属変数の場合である．もし，例えば例(1)で $\mathbb{R}^c$ の任意の曲線 $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_c(x))$ を考えると

$$I(g) = \int_a^b \|g'(x)\| dx = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{c}(\frac{d}{dx}g_i(x))^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

を最小にする．オイラー・ラグランジュ方程式は

$$0=\frac{d}{dx}\frac{g_i'(x)}{(\sum_{j=1}^{c}g_j'(x)^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{g_i''\sum_{j=1}^{c}(g_j')^2-g_i'\cdot\sum_{j=1}^{c}g_j'g_j''}{(\sum_{j=1}^{c}(g_j')^2)^{\frac{3}{2}}}\quad(\ i=1,\ldots,c) \tag{28}$$

で与えられる．この式からは，それほど多くのことをただちに見ることはできない．すでに見たように曲線 $g(x)$ の長さ $I(g)$ は変数のとり方によらない．したがって $x\mapsto g(x)$ が(28)の解であれば，任意の全単射 $t\mapsto x(t)$ に対して $\gamma(t):=g(x(t))$ も解となる．別の言い方をすると，あまりにたくさんの解がありすぎるのである．一方，滑らかな曲線 g は $\|\frac{d}{dt}g(x(t))\|\equiv 1$ となるように変数 $x=x(t)$ を取り替えることができる．方程式(28)は これによって

$$\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}g_i(x(t)))=0\quad(\ i=1,\ldots,c),$$

となり $g(x(t))$ は直線となる．この場合 $g(x)$ も直線であるが，弧長変数で表されているとは限らない．

物理では，平衡状態は最小ポテンシャルエネルギー原理によって決定される．一方(動)力学は ハミルトン(Hamilton)原理で記述される．どちらも変分原理の問題である．自由度 d の物理系が与えられているとし，パラメーターを $q^1,\ldots,q^d$ とおく．これらのパラメーターを時間 t の関数として表すことで，この系の安定状態を記述したい．この系の力学的性質は以下で表される．

— 運動エネルギー $T=\sum_{i,j=1}^{d}A_{ij}(q^1,\ldots q^d,t)\dot{q}^i\dot{q}^j$.

　(T は速度 $\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^d$，座標 $q^1,\ldots,q^d$ と t の関数である．“・” は常に時間に関する微分を表す，T はしばしば表面上は t によらない形で与えられる(以下を見よ)．T は一般化された速度 $(\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^d)$ の 2 次形式で与えられる

— ポテンシャルエネルギー $U=U(q^1,\ldots q^d,t)$.

　U と T はどちらも C^2 であるとする．

ハミルトンの原理とは時刻 t_0 と時刻 t_1 での二点の間の運動は初期状態と最終状態がそれぞれ与えられた $q(t_0)$ と $q(t_1)$ となる関数 $q(t)=(q^1(t),\ldots,q^d(t))$ 全体の中で積分

$$I(q) := \int_{t_0}^{t_1} (T-U)dt \tag{29}$$

の停留点として起こることを公理とすることである．

したがって初期状態から最終状態に向かう系の中で積分の最小値を探す必要はなく，単に積分の停留値を探せばよい．停留値は最小値のときと同様にオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial}{\partial q^i}(T-U) = 0(\ i=1,\ldots,d) \tag{30}$$

を満たす．U，T が時間 t に表面上依存していないとき，平衡状態はすべての量が時間に関して定数であるということで特徴づけられ，特に $\dot{q}^i = 0$ $(i=1,\ldots,d)$，$T=0$ であるから，(30) より

$$\frac{\partial U}{\partial q^i} = 0 \quad (i=1,\ldots,d). \tag{31}$$

よって平衡状態では U は臨界値であり，この平衡状態が安定であるには U が最小値である必要がある．

エネルギー保存定理を T，U が時間に依存しない場合に（もちろん時間に依存する $q^i, \dot{q}^i$ を通じて陰には時間に依存する）導こう．

$$\sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(A_{ij}+A_{ji})\dot{q}^i\dot{q}^j$$

に注意して，必要なら A_{ij} を $\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})$ に置き換えることで

$$A_{ij} = A_{ji}$$

としてよい．

$$T = \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}(q^1,\ldots,q^d)\dot{q}^i\dot{q}^j$$
$$U = U(q^1,\ldots,q^d).$$

ラグランジュ関数

$$L = T - U$$

を導入することでオイラー・ラグランジュ方程式は

$$0 = \frac{d}{dt} L_{\dot{q}^i} - L_{q^i} \quad (i = 1, \ldots, d)$$

と表せる．

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{d} \dot{q}^i L_{\dot{q}^i} - L\right) = \sum_{i=1}^{d}\left(\ddot{q}^i L_{\dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{d}{dt} L_{\dot{q}^i} - L_{\dot{q}^i}\ddot{q}^i - L_{q^i}\dot{q}^i\right) = 0$$

なので

$$\sum_{i=1}^{d} \dot{q}^i L_{\dot{q}^i} - L = \ t \text{ によらない定数}.$$

一方

$$\sum_{i=1}^{d} \dot{q}^i L_{\dot{q}^i} = \sum_{i=1}^{d} 2\dot{q}^i \sum_{k=1}^{d} A_{ik}\dot{q}^k = 2T.$$

これより

$$2T - L = T + U$$

は t によらない定数となる．$T + U$ を系の全エネルギーといい，これで T, U が時間 t によらない場合のエネルギー保存則を示したことになる．

特別な例として三次元空間内の質点 m の運動が挙げられる．運動の経路を $q(t) = (q^1(t), q^2(t), q^3(t))$ とおく．この場合，運動エネルギーは

$$T = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3} \dot{q}^i(t)^2$$

でポテンシャルエネルギー U はニュートン (Newton) の重力法則より決まる．

例えば，原点に引力の源である質点が置かれている場合には

$$U = -m\frac{g}{\|q\|}$$

で与えられる ($g =$ 定数)．

安定な平衡状態の近傍での運動を考えよう．再び T, U が時刻 t によらないとする．一般性を失わずに $t = 0$ で平衡状態であるとしまた $U(0) = 0$ としてよい．運動は停留点の近傍で起こるとしているので $\dot{q}^i$, q^i に関して 2 階以上の項は無視し

$$T = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$$

$$U = \sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}q^iq^j$$

で与えられているものとする．ただし a_{ij}, b_{ij} は定数係数．ここで，U はテイラー級数の 2 階項で置き換えている（1 階項は(31)により消える）．特に $b_{ij} = b_{ji}$ としてよい．

$$T = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})\dot{q}^i\dot{q}^j$$

と表し，同様に T の係数は対称にできる．U は 0 で最小値をとるので，行列

$$B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$$

は正定値である．

最後に

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$$

が正定値であると仮定する．

方程式(30)は

$$\sum_{j=1}^{d} a_{ij}\ddot{q}^j + \sum_{j=1}^{d} b_{ij}q^j = 0 \quad (i = 1, \dots, d) \tag{33}$$

となり，ベクトルを使って書くと，正定値対称行列 $C = A^{-1}B$ により

$$\ddot{q} + Cq = 0 \tag{34}$$

と表せる．C は対称なので直交行列により対角行列にできるので

$$S^{-1}CS =: D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}.$$

ここで S は直交行列．C は正定値なので，すべての固有値 $\lambda_1, \dots \lambda_d$ は正数．$y = S^{-1}q$ とおくと(34)式は

$$\ddot{y} + Dy = 0$$

と表せる．つまり

$$\ddot{y}^i + \lambda_i y^i = 0 \quad (\ i = 1, 2, \ldots, d). \tag{35}$$

(35)式の一般解は，

$$y^i(t) = \alpha_i \cos(\sqrt{\lambda_i} t) + \beta_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t)$$

で与えられる．ただし $\alpha_i, \beta_i (i = 1, \ldots, d)$ は任意の実数．

次に連続体力学における最も簡単な問題を取り扱おう．平衡状態と運動(力学)は形式的には前に見たように特徴づけられるが，系の状態は有限個のパラメーターで表すことができない．パラメーター $q^1(t), \ldots, q^d(t)$ のかわりに系の運動または静止状態を表す(実数値またはベクトル値)関数 $f(x, t)$ または $f(x)$ をそれぞれ求めなくてはならない．

まず．最も簡単な例として等質な弦の振動を考える．弦が定張力 μ の下で，平衡状態から小さな振動が起こっている場合を考える．この状態は x 軸の区間 $0 \leq x \leq \ell$ と x 軸に垂直な方向の張力が $f(x, t)$ で与えられる．弦の端点は固定されており，したがって，任意の t で $f(0, t) = 0 = f(\ell, t)$ である．

運動エネルギーは

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^\ell f_t^2 dx \quad (\rho \text{ は弦密度}) \tag{36}$$

でポテンシャルエネルギーは

$$U = \mu \{ \int_0^\ell \sqrt{1 + f_x^2} dx - \ell \}$$

で与えられ，静止状態から増加した長さに比例する．平衡状態から少しだけ引っ張られた場合を考えるので，前と同様に高階項は無視し

$$U = \frac{\mu}{2} \int_0^\ell f_x^2 dx \tag{37}$$

とする．ハミルトンの原理より運動は

$$I(f) = \int_{t_0}^{t_1} (T-U)dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{\ell}(\rho f_t^2 - \mu f_x^2)dxdt \tag{38}$$

の，任意の t で $f(0,t) = f(\ell,t) = 0$ となる関数の中での停留点として特徴づけられる．

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\rho f_{tt} - \mu f_{xx} = 0 \tag{39}$$

で与えられる．これを波動方程式という．簡単ため，$\rho = \mu = 1$ としよう．弱い意味のオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{\ell}(f_t\varphi_t - f_x\varphi_x)dxdt = 0 \ (\forall\ \varphi \in C_0^{\infty}((0,\ell)\times(t_0,t_1))). \tag{40}$$

（ここでは $t = t_0$，$t = t_1$ での境界条件を課しておらず，必ずしも $t = t_0$ と $t = t_1$ でゼロになるとは限らない関数 φ に対しても上が成り立つとしている．これについてはここでは詳細に立ち入らない．）

$\gamma \in C^1(\mathbb{R})$ とする．関数 g

$$g(x,t) := \gamma(x-t)$$

は $C^1([0,\ell]\times[t_0,t_1])$ に属し，

$$g_x = -g_t$$

を満たす．ゆえに，任意の $\varphi \in C_0^{\infty}((0,\ell)\times(t_0,t_1))$ で

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{\ell}(g_t\varphi_t - g_x\varphi_x)dxdt = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{\ell}(-g_x\varphi_t + g_t\varphi_x)dxdt$$
$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{\ell} g(\varphi_{tx} - \varphi_{xt})dxdt = 0$$

が成立する．g は(40)の解であるが，必ずしも 2 回微分可能とは限らずオイラー・ラグランジュ方程式

$$f_{tt} - f_{xx} = 0. \tag{41}$$

の古典解となるかはわからない．

このように，オイラー・ラグランジュ方程式の弱解は一般には古典解となるかはどうかわからない．

この例で，被積分関数

$$H(p) = p_2^2 - p_1^2 \quad (p_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, p_2 = \frac{\partial f}{\partial t})$$

は解析的であるが，ヘッセ行列 $(H_{p_i p_j})$ は不定値，つまり

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

である．さらに，この例においては波動方程式

$$g_{tt} - g_{xx} = 0$$

の一般解が

$$g(x,t) = \gamma(x-t) + \delta(x+t)$$

で与えられることが知られている．

弦が外力 $k(x,t)$ を受けている場合ポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{\mu}{2}\int_0^\ell f_x^2 dx + \int_0^\ell k(x,t)f(x,t)dx$$

で与えられ，運動方程式は

$$\rho f_{tt} - \mu f_{xx} + k = 0 \tag{42}$$

で与えられる．平衡状態（k が時間 t によらない場合）は

$$\mu f_{xx}(x) - k(x) = 0. \tag{43}$$

で与えられる．膜の場合も状況は同じである．静止状態で xy 平面の領域 Ω を覆い，垂直方向にのみ動ける伸縮面を考える．ポテンシャルエネルギーは静止状態の面積との面積の差に比例する．比例定数，また以後現れる物理定数はすべて 1 であるとする．$f(x,y,t)$ で面の垂直方向の伸縮を表すと

$$U = \int_\Omega \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy - \ \mathrm{Vol}\,(\Omega) \tag{44}$$

となる．前と同様に小さな変動のみを考え U を

$$U=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(f_x^2+f_y^2)dxdy \tag{45}$$

で置き換える．運動エネルギーは

$$T=\frac{1}{2}\int_{\Omega}f_t^2dxdy. \tag{46}$$

運動方程式は

$$f_{tt}-\Delta f=0 \quad (\Delta f=f_{xx}+f_{yy}) \tag{47}$$

で与えられ，静止状態は

$$\Delta f=0 \tag{48}$$

で特徴づけられる．これは以前に得たものと一致する．外力 $k(x)$ のある場合の静止状態は

$$\Delta f(x,y)=k(x,y) \tag{49}$$

で記述できる．よって膜が境界で固定されている場合はディリクレ問題

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y)=k(x,y) &\quad (x,y)\in\Omega\\ f(x,y)=0 &\quad (x,y)\in\partial\Omega\end{aligned}$$

を解かなくてはいけない．面積汎関数

$$I(f)=\int_{\Omega}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

に対するオイラー･ラグランジュ方程式を求めよう．$H(p_1,p_2)=\sqrt{1+p_1^2+p_2^2}$ とおき，

$$H_{p_i}=\frac{p_i}{\sqrt{1+p_1^2+p_2^2}}$$

$$H_{p_ip_j}=\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{1+p_1^2+p_2^2}}-\frac{p_ip_j}{(1+p_1^2+p_2^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \left(\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & \neq j\end{cases}\right)$$

が成り立つ．よってオイラー・ラグランジュ方程式は

$$0 = \sum_{i,j=1}^{2} H_{p_i p_j} f_{x^i x^j} = \frac{1}{(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}}\{(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}\}$$

となる．つまり

$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0$$

となる．この方程式は**極小曲面方程式**と呼ばれ，(x,y) 平面上の領域 Ω 上のグラフで表される停留面を記述している．

最後に

$$Q(f) = \int_{\Omega}\Big\{\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) f_{x^i} f_{x^j} + \sum_{i=1}^{d} 2b_i(x) f \cdot f_{x^i} + c(x) f(x)^2\Big\}dx \quad (50)$$

の形の汎関数を考える．一般性を失わずに $a_{ij} = a_{ji}$ としてよい．オイラー・ラグランジュ方程式は

$$-\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^j} + b_i(x) f\Big) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i} + c(x) f = 0 \quad (51)$$

で与えられる．この形の汎関数のオイラー・ラグランジュ方程式は f とその微分に関して線形である．次にオイラー・ラグランジュ方程式の変数変換公式を調べよう．

$\xi \mapsto x(\xi)$ を Ω' から Ω への上への微分同相とし $D_x f = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^d})$, $D_\xi x = (\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j})_{i,j=1,\dots,d}$.

$$H(x, f, D_x f) = H(x(\xi), f, D_\xi f \cdot (D_\xi x)^{-1}) =: \Phi(\xi, f, D_\xi f).$$

変数変換を積分記号の下で行うと

$$\int_{\Omega} H(x, f, D_x f)dx = \int_{\Omega'} \Phi(\xi, f, D_\xi f)|\det(D_\xi x)|d\xi. \quad (52)$$

記述を簡単にするために

$$[H]_f = -\Big(\sum_{i=1}^{d} \frac{d}{dx^i} H_{p^i} - H_f\Big) \quad (53)$$

とおく．$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対してオイラー・ラグランジュ方程式の微分より

$$\begin{aligned}\int_\Omega [H]_f \varphi dx &= \frac{d}{dt}_{|t=0} \int_\Omega H(x, f + t\varphi, D_x f + tD_x\varphi)dx \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0} \int_{\Omega'} \Phi(\xi, f + t\varphi, D_\xi f + tD_\xi\varphi)|\det(D_\xi x)|d\xi \\ &= \int_{\Omega'} [\Phi|\det(D_\xi x)|]_f \varphi d\xi \\ &= \int_\Omega [\Phi|\det(D_\xi x)|]_f \varphi|\det(D_x\xi)|dx.\end{aligned}$$

これがすべての $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ で成り立つので，系 19.20 より

$$[H]_f = [\Phi|\det(D_\xi x)|]_f|\det(D_x\xi)|. \tag{54}$$

(仮定 $H \in C^2$ より，

$$I(f) = \int_\Omega H(x, f(x), Df(x))dx$$

を関数

$$I : C^2(\Omega) \to \mathbb{R}$$

と考える．I の微分は

$$\varphi \mapsto DI(\varphi) = \int_\Omega [H]_f \varphi dx$$

で与えられるので，$[H]_f$ は I の勾配と思える．方程式(54)はこの勾配の変数変換が有限次元の勾配の場合と同じような振る舞いをすることを示している.)

これを使ってラプラス作用素の変数変換を学ぶ．(54)の良い点は 2 階微分項の変数変換をしなくて良いところにある．ラプラス方程式は最初に見たようにディリクレ積分のオイラー・ラグランジュ方程式である．

$\xi \mapsto x(\xi)$ を Ω' から Ω への上への微分同相とし

$$g_{ij} := \sum_{k=1}^d \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^j}$$

$$g^{ij} := \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k}$$

とおく．よって

$$\sum_{i=1}^{d} g_{ik} g^{i\ell} = \delta_{k\ell} \left(= \begin{cases} 1 & k = \ell \\ 0 & k \neq \ell \end{cases} \right).$$

さらに

$$g := \det(g_{ij})$$

とする．

$$\sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial \xi^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = \sum_{j,k=1}^{d} g^{jk} \frac{\partial f}{\partial \xi^j} \frac{\partial f}{\partial \xi^k}.$$

公式(54)より(50)と(51)から

$$\Delta f(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left(\sqrt{g} \sum_{k=1}^{d} g^{jk} \frac{\partial f}{\partial \xi^k} \right) \tag{55}$$

を得る．これが求めるラプラス作用素の変数変換公式である．

平面の極座標

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$$

を使って計算すると

$$\Delta f(x,y) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right). \tag{56}$$

また空間の極座標では

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\theta$$

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{1}{r^2\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin\theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right). \tag{57}$$

(極座標については18章を参照.)

22 章の演習

1） $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界開集合とする． $f \in H^{2,2}(\Omega)$ に対して

$$E(f) := \int_\Omega |D^2 f(x)|^2 dx$$

とおく．（ここで $D^2 f$ は 2 階弱微分 $D_i D_j f\ i, j = 1, \ldots, d,$ の定める行列で

$$|D^2 f(x)|^2 = \sum_{i,j=1}^{d} |D_i D_j f(x)|^2.)$$

以下の変分問題を考えよ．与えられた $g \in H^{2,2}(\Omega)$ に対して，$E(f)$ を

$$A_g := \{f \in H^{2,2}(\Omega) : \\ f - g \in H_0^{1,2}(\Omega),\ D_i f - D_i g \in H_0^{1,2}(\Omega),\ i = 1, \ldots, d\}$$

の中で最小にせよ．

2） $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を非負，第一変数に関して可測，第二，第三変数に関して凸，つまり任意の $f, g \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{R}^d, 0 \le t \le 1, x \in \Omega$ に対して

$$H(x, tf + (1-t)g, tp + (1-t)q) \\ \le tH(x, f, p) + (1-t)H(x, g, q)$$

とする． $f \in H^{1,2}(\Omega)$ に対して

$$I(f) := \int_\Omega H(x, f(x), Df(x))dx$$

とおく．I が弱 $H^{1,2}$ 収束に関して下半連続であることを示せ．

3） a） A を $(d \times d)$ 行列で $\det(A) \neq 0$ となるものとする．変数変換

$$\xi \mapsto x = A\xi$$

を考える．ラプラス作用素 $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$ はこの変数変換によってどのように表されるか？

b）座標変換 $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$

$$x = \sin\xi \cosh\eta$$
$$y = \cos\xi \sinh\eta$$

（楕円座標）を考え，この座標でラプラス作用素を表せ．

4）回転対称な調和関数 $f: \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ をすべて求めよ．

5）$m \in \mathbb{N}$ に対して，ルジャンドル(Legendre)多項式を

$$P_m(t) := \frac{1}{2^m m!}\left(\frac{d}{dt}\right)^m (t^2-1)^m$$

で定義する．

$$f(r,\theta) := r^m P_m(\cos\theta)$$

が $\Delta f = 0$ を満たすことを示せ．（上は空間極座標で表されている.）

6）$a, b \in \mathbb{R}, g_1, g_2 > 0$ とする．関数 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ で $f(a) = g_1, f(b) = g_2$ となるものに対して

$$K(f) := 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx \to \min$$

を考える ($I(f)$ は f を x 軸の周りに回転してできる曲面の面積を与える．よってここでは与えられた二つの円を境界をとする回転面のなかで面積最小のものを探すことになる.）対応するオイラー・ラグランジュ方程式を解け．

7）プレートとは薄い伸縮性のある物体で静止状態で平面となるものとする．このような物体の外力 K によって引き起こされる小さな横断的振動を考える．まず，平衡状態を考えよう．$f(x,y)$ を垂直方向の変分とする．変形のポテンシャルエネルギーは

$$U = U_1 + U_2,$$

ただし,

$$U_1 = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\big(\Delta f(x,y)\big)^2 + \mu\big(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\big)\Big)dxdy$$

(ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ が静止状態, $\mu =$ 定数),

$$U_2 = \int_\Omega K(x,y)f(x,y)dxdy$$

である. オイラー・ラグランジュ方程式

$$\Delta(\Delta f) + K = 0$$

を導け. また運動に関しては $f(x,y,t)$ を垂直方向の変分としたとき, 運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}\int_\Omega f_t^2 dxdy$$

で与えられる. プレートの運動を記述する微分方程式を求めよ.

第23章

弱解の正則性

［ 適当な楕円性を仮定すると偏微分方程式(PDE)の 弱解は滑らかになる．特に調和関数に関するラプラス方程式にこれを適用することで前の章で導入されたディリクレの原理が正当化される． ］

前章でラプラス方程式とポアソン方程式の弱解を構成した．それは $k \in L^2(\Omega)$ が与えられたとき，$f \in H^{1,2}(\Omega)$, $f - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$ (g 与えられた境界条件)で，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ もしくは $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^d D_i f(x) D_i \varphi(x) dx + \int_\Omega k(x)\varphi(x) dx = 0 \tag{1}$$

を満たすもののことであった..

この章では，(1)の解が正則であることを見る．例えば k が Ω 上 C^∞ であれば，f も同様である．特に f は

$$\Delta f(x) = k(x) \quad (x \in \Omega)$$

の古典解である．同様に，もし $\partial\Omega$ が後に定義するような意味で C^∞ で，g もまた C^∞ のとき，f は $C^\infty(\overline{\Omega})$ で，任意の $x \in \partial\Omega$ で

$$f(x) = g(x)$$

が成立することを見る．

証明のすべきことは，f の任意の階数の微分が 2 乗可積分であること，つまり $f \in W^{k,2}(\Omega)$ が任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して成り立つことで，これを示せばソボレフの埋め込み定理より $f \in C^\infty(\Omega)$ がただちに導かれる．

証明のアイデアを明確にするために，(1)で $\varphi = D_j D_j f$ とおけるとしてみる．一般には，このようなことは成り立たない．この φ は境界でゼロには

ならないし．φ とその 1 階微分が 2 乗可積分かどうかもわからない．しかしながら，このような φ をとってみると

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^d D_i f(x) D_i D_j D_j f(x) dx + \int_\Omega k(x) D_j D_j f(x) dx = 0$$

を得る．これを部分積分し（さらなる仮定をせずに部分積分ができるという誤った仮定をここでもしている），j に関して和をとると

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d D_j D_i f(x) D_j D_i f(x) dx + \int_\Omega k(x) \cdot \sum_{j=1}^d D_j D_j f(x) dx = 0.$$

よって，ヘルダーの不等式を用いると

$$\|D^2 f\|_{L^2}^2 \leq \|k\|_{L^2} \|D^2 f\|_{L^2}.$$

つまり

$$\|D^2 f\|_{L^2} \leq \|k\|_{L^2}. \tag{2}$$

このようにして 2 階微分の評価を得る．これからの我々の方針は，以上の考察における f の 2 階微分のかわりに差分商を用い，この差分商を適当な $\eta(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ と掛け合わせることで，テスト関数 φ を得る．これを代入することで (2) と同様の評価を f の 2 階差分商に対して得，これはパラメーター h によらない．極限 $h \to 0$ をとることで，まず f の 2 階弱微分が存在することがわかり，さらにその評価を得る．

この過程を k が適当な仮定を満たす限り繰り返すことで，より高階の微分の評価を得る．

定義 23.1 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して，差分商を

$$\Delta_i^h f(x) := \frac{f(x + he^i) - f(x)}{h} \quad (h \neq 0)$$

で定義する．ここで e^i は $\mathbb{R}^d$ の i 番目の $(i \in \{1, \ldots, d\})$ の単位ベクトルである．

次の差分作用素に対する部分積分の公式を用意する．

補題 23.2 $f, \varphi \in L^2(\Omega), \mathrm{supp}\varphi \Subset \Omega, |h| <\ \mathrm{dist}\ (\mathrm{supp}\varphi, \partial\Omega)$ とすると，

$$\int_\Omega \varphi(x)\Delta_i^h f(x)dx = -\int_\Omega f(x)\Delta_i^{-h}\varphi(x)dx. \tag{3}$$

が成り立つ.

証明 証明は以下の計算より.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \varphi(x)\frac{f(x+he^i)-f(x)}{h}dx \\
&\quad = \frac{1}{h}\int_\Omega \varphi(x)f(x+he^i)dx - \frac{1}{h}\int_\Omega \varphi(x)f(x)dx \\
&\quad = \frac{1}{h}\int_\Omega \varphi(y-he^i)f(y)dy - \frac{1}{h}\int_\Omega \varphi(y)f(y)dy
\end{aligned}$$

(一番目の積分では $y = x + he^i$ とし，二番目の積分では $y = x$ で置き換えている．h に関する仮定に注意)

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega f(y)\frac{\varphi(y-he^i)-\varphi(y)}{h}dy \\
&= -\int_\Omega f(y)\frac{\varphi(y+(-h)e^i)-\varphi(y)}{-h}dy.
\end{aligned}$$

これより求める公式を得る. □

補題 23.3 $f \in W^{1,2}(\Omega), \Omega' \Subset \Omega, |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ とする．このとき $\Delta_i^h f \in L^2(\Omega')$ で

$$\|\Delta_i^h f\|_{L^2(\Omega')} \le \|D_i f\|_{L^2(\Omega)} \quad (i = 1, \ldots, d).$$

証明 近似法より，$f \in C^1(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ の場合に考えればよい.

$$\begin{aligned}
\Delta_i^h f(x) &= \frac{f(x+he^i)-f(x)}{h} \\
&= \frac{1}{h}\int_0^h D_i f(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i+\xi, x^{i+1}, \ldots, x^d)d\xi.
\end{aligned}$$

ヘルダー不等式より

$$|\Delta_i^h f(x)|^2 \le \frac{1}{h}\int_0^h |D_i f(x^1,\ldots,x^i+\xi,\ldots,x^d)|^2 d\xi.$$

さらに

$$\int_{\Omega'} |\Delta_i^h f(x)|^2 dx \le \frac{1}{h}\int_0^h \int_\Omega |D_i f|^2 dx d\xi$$
$$= \int_\Omega |D_i f|^2 dx.$$

□

逆に次が成り立つ.

補題 23.4 $f \in L^2(\Omega)$ とし，ある $K < \infty$ が存在して $\Delta_i^h f \in L^2(\Omega')$ および

$$\|\Delta_i^h f\|_{L^2(\Omega')} \le K$$

が任意の $h > 0$ と $|h| <$ dist $(\Omega', \partial\Omega)$ を満たす任意の $\Omega' \Subset \Omega$ に対して成立すると仮定する．このとき弱微分 $D_i f$ が存在して

$$\|D_i f\|_{L^2(\Omega)} \le K.$$

証明 定理 21.8 より，$L^2(\Omega')$ の有界集合 $\{\Delta_i^h f\}$ は弱収束列を含む．これが任意の Ω' に対して成立するので，列 $h_n \to 0$ と $\|v\|_2 \le K$ となる $v \in L^2(\Omega)$ が存在して(例えば系 21.9 を参照),[1]

$$\int_\Omega \varphi \Delta_i^{h_n} f \to \int_\Omega \varphi v \quad (\varphi \in C_0^1(\Omega)).$$

$h_n <$ dist $(\mathrm{supp}\varphi, \partial\Omega)$ であれば，(3) より (補題 23.2)

$$\int_\Omega \varphi \Delta_i^{h_n} f = -\int_\Omega f \Delta_i^{-h_n}\varphi \to -\int_\Omega f D_i \varphi \quad (n \to \infty).$$

これより

$$\int_\Omega \varphi v = -\int_\Omega f D_i \varphi.$$

---

[1] 各 n について $h_n <$ dist $(\mathrm{supp}\,\varphi, \partial\Omega)$ が必要．定理 20.7 の注を参照.

つまり $v = D_i f$. □

定理 23.5 $k \in L^2(\Omega)$ とし，$f \in W^{1,2}(\Omega)$ を $\Delta f = k$ の弱解とする．任意の $\Omega' \Subset \Omega$ に対して $f \in W^{2,2}(\Omega')$ であり

$$\|f\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq \ C\ (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|k\|_{L^2(\Omega)}). \tag{4}$$

ここで定数 C は d と $\delta :=\ \mathrm{dist}\ (\Omega', \partial\Omega)$ にのみよる．さらに $\Delta f = k$ が Ω のほとんどすべての点で成り立つ．

証明 $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$, $\mathrm{dist}\ (\Omega'', \partial\Omega) \geq \delta/4$, $\mathrm{dist}\ (\Omega', \partial\Omega'') \geq \delta/4$ とする．f は弱解なので

$$\int_\Omega Df \cdot Dw = -\int_\Omega k \cdot w \quad (\ w \in H_0^{1,2}(\Omega)). \tag{5}$$

以下，

$\mathrm{supp}\ w \Subset \Omega''$ （つまり $w \in H_0^{1,2}(\Omega''')$ がある $\Omega''' \Subset \Omega''$ に対して成り立つ）

となる w を考え，常に $h > 0$ を

$$|2h| <\ \mathrm{dist}\ (\mathrm{supp}\, w, \partial\Omega'')$$

となるようにとる．さらに(5)の w を $\Delta_\ell^{-h} w (\ell \in \{1, \ldots d\})$ に置き換えても良い(なぜなら $w \in H^{1,2} \Rightarrow \Delta_\ell^{-h} w \in H^{1,2}$).

これより補題 23.3 と h の選び方より

$$\begin{aligned}\int_{\Omega''} D\Delta_\ell^h f Dw &= \int_{\Omega''} \Delta_\ell^h (Df) \cdot Dw \\ &= -\int_{\Omega''} Df \Delta_\ell^{-h} Dw = -\int_{\Omega''} Df \cdot D(\Delta_\ell^{-h} w) \\ &= \int_{\Omega''} k \Delta_\ell^{-h} w \\ &\leq \|k\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|Dw\|_{L^2(\Omega'')}\end{aligned} \tag{6}$$

が従う．

次に $\eta \in C_0^1(\Omega''), 0 \leq \eta \leq 1, \eta(x) = 1\ x \in \Omega'$, $|D\eta| \leq \frac{8}{\delta}$ とし，

$$w := \eta^2 \Delta_\ell^h f \tag{7}$$

とおく．(6) より

$$\begin{aligned}\int_{\Omega''} |\eta D\Delta_\ell^h f|^2 &= \int_{\Omega''} D\Delta_\ell^h f \cdot Dw - 2\int_{\Omega''} \eta\Delta_\ell^h f D\Delta_\ell^h f \cdot D\eta \\ &\le 2\|k\|_{L^2(\Omega)}(\|\eta D\Delta_\ell^h f\|_{L^2(\Omega'')} + \|\Delta_\ell^h f D\eta\|_{L^2(\Omega'')}) \\ &\quad + 2\|\eta D\Delta_\ell^h f\|_{L^2(\Omega'')}\|\Delta_\ell^h f D\eta\|_{L^2(\Omega'')}\end{aligned} \tag{8}$$

を得る．

以下の評価でシュヴァルツの不等式を

$$ab \le \frac{1}{2\varepsilon}a^2 + \frac{\varepsilon}{2}b^2$$

の形で使う．ただしここで ε は目的にかなうように選ぶ．

補題 23.3 より（h の選び方に注意）

$$\begin{aligned}\|\eta D\Delta_\ell^h f\|_{L^2(\Omega'')}^2 &\le 4\|k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4}\|\eta D\Delta_\ell^h f\|_{L^2(\Omega'')}^2 \\ &\quad + \|k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sup|D\eta|^2\|D_\ell f\|_{L^2(\Omega'')}^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\|\eta D\Delta_\ell^h f\|_{L^2(\Omega'')}^2 + 4\sup|D\eta|^2\|D_\ell f\|_{L^2(\Omega'')}^2\end{aligned} \tag{9}$$

を得る．ここで $h <$ dist $(\partial\Omega'', \mathrm{supp}\eta)$ ととり，(8) のノルムは $\mathrm{supp}\eta$ の上でのみとることに注意すると，Ω'' として η が Ω'' 内にコンパクトな台を持つようにとることができる．

シュヴァルツの不等式を適用するにあたっての重要なトリックは右辺の $\|\eta D\Delta_\ell^h f\|_{L^2(\Omega'')}^2$ に左辺に現れる項より小さな値の項をかけることで右辺の寄与を左辺の寄与に吸収してしまうことである．Ω' 上 $\eta \equiv 1$ で $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \le a+b$ なので

$$\begin{aligned}\|D\Delta_\ell^h f\|_{L^2(\Omega')} &\le \|\eta D\Delta_\ell^h f\|_{L^2(\Omega'')} \\ &\le c(\|k\|_{L^2(\Omega)} + \sup|D\eta| \cdot \|D_\ell f\|_{L^2(\Omega'')}) \quad (c \text{ は定数})\end{aligned} \tag{10}$$

を得る．$h \to 0$ とすることで，補題 23.4 より

$$\|D^2 f\|_{L^2(\Omega')} \le c(\|k\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\delta}\|Df\|_{L^2(\Omega'')}). \tag{11}$$

次に

$$\|Df\|_{L^2(\Omega'')} \le c(\frac{1}{\delta}\|f\|_{L^2(\Omega)} + \delta\|k\|_{L^2(\Omega)}) \tag{12}$$

となることを見る．このために $\zeta \in C_0^1(\Omega)$ で，$x \in \Omega''$ に対して $\zeta(x) = 1$, $|D\zeta| \le \frac{8}{\delta}$ となるものをとる．(5) で $w = \zeta^2 f$ とおき，シュヴァルツの不等式を使うことで

$$\begin{aligned}\int_\Omega \zeta^2|Df|^2 &= -2\int_\Omega \zeta f Df\cdot D\zeta - \int_\Omega k\cdot\zeta^2 f\\ &\le \frac{1}{2}\int_\Omega \zeta^2|Df|^2 + 2\int_\Omega f^2|D\zeta|^2 + \delta^2\int_\Omega k^2 + \frac{1}{\delta^2}\int f^2\end{aligned} \tag{13}$$

を得，よって

$$\int_{\Omega''} |Df|^2 \le \int_\Omega \zeta^2|Df|^2 \le c(\frac{1}{\delta^2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta^2\|k\|^2_{L^2(\Omega)}). \tag{14}$$

これはちょうど(12)になる．(4)は(11)，(12)より従う． □

さらに k が $W^{1,2}(\Omega)$ に属するとき，(5) の w を $D_i w$ で置き換えることで

$$\int_\Omega D(D_i f)Dw = -\int D_i k\cdot w$$

を得る．定理 23.5 より $D_i f \in W^{2,2}(\Omega')$ であり，よって $f \in W^{3,2}(\Omega')$.

これを繰り返すことで

定理 23.6 $f \in W^{1,2}(\Omega)$ を $\Delta f = k$, $k \in W^{m,2}(\Omega)$ の弱解とする．任意の $\Omega' \Subset \Omega$ に対して $f \in W^{m+2,2}(\Omega')$ であり

$$\|f\|_{W^{m+2,2}(\Omega')} \le C\ (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|k\|_{W^{m,2}(\Omega)}).$$

ここで C は d, m と dist $(\Omega', \partial\Omega)$ のみによる定数．

系 23.7 $f \in W^{1,2}(\Omega)$ を，$k \in C^\infty(\Omega)$ に対する $\Delta f = k$ の弱解とすると $f \in C^\infty(\Omega)$.

証明 これは定理 23.6 とソボレフ埋め込み定理(特に系 20.19)より従う．実際，任意の $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して $\eta f \in H_0^{m,2}(\Omega)$ がすべての m に対して成り立ち，

$x_0 \in \Omega$ に対して，ある $r > 0$ が存在して $B(x_0, r) \subset \Omega$ で，$x \in B(x_0, r)$ に対して $\eta(x) = 1$ となる $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ と $x \in B(x_0, r)$ に対して $\eta(x)f(x) = f(x)$ が成り立つことよりわかる． □

系 23.8 $f \in W^{1,2}(\Omega)$ をラプラス作用素の固有関数とする．つまり，ある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\Delta f + \lambda f = 0$ が，弱い意味で成立するとき $f \in C^\infty(\Omega)$.

証明　方程式を

$$\Delta f = -\lambda f$$

の形に書く．仮定より右辺は $W^{1,2}$ に属し，定理 23.5 より $f \in W^{3,2}$．これより右辺は $W^{3,2}$ に属し，よって $f \in W^{5,2}$ が定理 23.6 より従う．繰り返すことで $f \in W^{m,2}$ が，すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して成り立つので，系 23.7 より $f \in C^\infty(\Omega)$. □

後のため，ラプラス作用素より一般的な線形楕円型作用素

$$Lf(x) := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{j=1}^{d} a^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^j} f(x)\right)$$

を考える．ここで $a^{ij}(x)$ は Ω で可測と仮定する．さらに，作用素 L は一様楕円型であると仮定する．ここで一様楕円型とは，ある定数 $0 < \lambda \leq \mu$ が存在して

$$\lambda \|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \mu\|\xi\|^2 \tag{15}$$

がすべての $x \in \Omega$ と任意の $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して成立することである．

明らかに，ラプラス作用素は(15)を $\lambda = \mu = 1$ に対して満たす．$f \in H^{1,2}(\Omega)$ は，任意の $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x) D_j f(x) D_i v(x) dx = -\int_\Omega k(x)v(x)dx \tag{16}$$

を満たすとき

$$Lf = k \quad (k \in L^2(\Omega)\ \text{与えられた関数})$$

の弱解という.

定理 23.5 は以下のように拡張できる.

定理 23.9 $f \in W^{1,2}(\Omega)$ を $Lf = k$ の Ω での弱解とする. ここで L は一様楕円型作用素で $k \in L^2(\Omega)$ とする. さらに, 関数 $a^{ij}(x)$ は $C^1(\Omega)$ に属し

$$\|a^{ij}\|_{C^1(\Omega)} \leq K \quad (\forall i, j) \tag{17}$$

が定数 K に対して成立するとする.

このとき $f \in W^{2,2}(\Omega')$ が任意の $\Omega' \Subset \Omega$ で成立し

$$\|f\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq c_1(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|k\|_{L^2(\Omega)}). \tag{18}$$

ここで c_1 は d, $\delta =$ dist $(\Omega', \partial\Omega)$, λ, K にのみよる定数である.

($\|a^{ij}\|_{C^1(\Omega)} \leq K$ と仮定することで, (15)の二番目の不等式が $\mu = Kd$ に対して成立することに注意せよ.)

証明 定理 23.5 の証明をうまく変更する. このために積の差分商に関する公式が必要である.

$$\begin{aligned}(\Delta_\ell^h(\rho\sigma))(x) &= \frac{1}{h}\{\rho(x+he^\ell)\sigma(x+he^\ell) - \rho(x)\sigma(x)\} \\ &= \{\rho(x+he^\ell)\Delta_\ell^h\sigma(x) + (\Delta_\ell^h\rho(x))\sigma(x)\}.\end{aligned} \tag{19}$$

特に

$$\begin{aligned}\Delta_\ell^h\Big(\sum_{j=1}^d a^{ij}(x)D_jf(x)\Big) = \sum_{j=1}^d &(a^{ij}(x+he^\ell)\Delta_\ell^h D_jf(x) \\ &+ (\Delta_\ell^h a^{ij}(x))D_jf(x)).\end{aligned} \tag{20}$$

前とまったく同じ議論で, (16)の v を $\Delta_l^{-h}v$ で置き換える. v は定理 23.5 の証明と同様の条件を満たす.

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega''}\sum_{i,j=1}^d \Delta_\ell^h(a^{ij}(x)D_jf(x))D_iv(x)dx \\ &= -\int k(x)\Delta_\ell^{-h}v(x)dx\end{aligned} \tag{21}$$

を得，(20)を考慮し $\psi^i(x) := \sum_{j=1}^d (\Delta_\ell^h a^{ij}(x))D_j f(x)$ に対し補題 23.3 を使うと，不等式

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega''}\sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x+he^\ell)D_j\Delta_\ell^h f(x)\cdot D_i v(x)dx \\
&\quad \leq (\sum_{i=1}^d \|\psi^i\|_{L^2(\Omega'')} + \|k\|_{L^2(\Omega'')})\|Dv\|_{L^2(\Omega'')} \\
&\quad \leq c_2(\|f\|_{W^{1,2}(\Omega'')} + \|k\|_{L^2(\Omega)})\cdot\|Dv\|_{L^2(\Omega'')} \qquad (22)
\end{aligned}$$

を得る．ここで c_2 は d, K による定数．これは(6)に対応している．

残りの証明は

$$\begin{aligned}
&\lambda\int_\Omega |\eta D\Delta_\ell^h f(x)|^2 dx \\
&\leq \int_\Omega \eta^2 \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x+he^\ell)\Delta_\ell^h D_i f(x)\Delta_\ell^h D_j f(x)dx \qquad (23)
\end{aligned}$$

であることを注意し，定理 23.5 の証明をなぞる．$\frac{1}{\lambda}$ という項が評価項に付け加わるだけである．

例として(12)の対応する式を導く．前と同様に(16)に $\zeta^2 f$ を代入し

$$\begin{aligned}
\lambda^2\int_\Omega \zeta^2(x)|Df(x)|^2dx &\leq \int_\Omega\sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x)D_jf(x)D_if(x)\zeta^2(x)dx \\
&= -2\int_\Omega\sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x)D_jf(x)\cdot\zeta(x)D_i\zeta(x)f(x)dx \\
&\quad -\int_\Omega k(x)\zeta^2(x)f(x)dx \\
&\leq \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega \zeta^2(x)|Df(x)|^2dx + \frac{2}{\lambda^2}K^2\int_\Omega f^2(x)|D\zeta(x)|^2dx \\
&\quad +\delta^2\int_\Omega\zeta^2(x)k(x)^2dx + \frac{1}{\delta^2}\int_\Omega f^2(x)dx \qquad (24)
\end{aligned}$$

を得る．ここで，いつものようにシュヴァルツの不等式

$$2ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$$

を使った．再び左辺の $\frac{\lambda^2}{2}\int \zeta^2(x)|Df(x)|^2 dx$ を右辺に吸収することができ

$$\int_{\Omega''} |Df(x)|^2 dx \le c_3\left(\frac{1}{\delta^2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta^2 \|k\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \tag{25}$$

を得る．これは(12)の対応するもので，c_3 は λ，K による． □

これを繰り返すことで，定理 23.6 と系 23.7 より以下の定理を得る．

定理 23.10 $f \in W^{1,2}(\Omega)$ を $k \in W^{m,2}(\Omega)$ に対する $Lf = k$ の弱解とする．さらに，L の係数 a^{ij} が $C^{m+1}(\Omega)$ に属し

$$\|a^{ij}\|_{C^{m+1}(\Omega)} \le K_m \quad (\forall\, i, j)$$

と仮定する．このとき，任意の $\Omega' \Subset \Omega$ に対して $f \in W^{m+2,2}(\Omega')$ で

$$\|f\|_{W^{m+2,2}(\Omega')} \le c(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|k\|_{W^{m,2}(\Omega)})$$

が成り立つ．ここで c は d, λ, m, K_m，dist $(\Omega', \partial\Omega)$ による．k と係数 a^{ij} が $C^\infty(\Omega)$ に属するなら，f もまた $C^\infty(\Omega)$ に属する． □

これにより発散型の楕円型作用素の解の正則性を得る．

系 23.11 $f \in W^{1,2}(\Omega)$ を

$$Mf(x) := \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{j=1}^d a^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^j} f(x) + b^i(x) f(x)\right) + \sum_{i=1}^d c^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} f(x) + d(x) f(x) = k(x)$$

の弱解とする．$k(x), d(x)$ と係数 $a^{ij}(x)$ が C^∞ に属するとき $f \in C^\infty(\Omega)$.

ここで弱解とは，任意の $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \{\sum_{i=1}^d (\sum_{j=1}^d a^{ij}(x)D_j f(x) + b^i(x)f(x))D_i v(x)$$

$$- (\sum_{i=1}^d c^i(x)D_i f(x) + d(x)f(x))v(x)\}dx$$

$$= - \int_\Omega k(x)v(x)dx \tag{26}$$

となるものである.

証明　(26)式を

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x)D_j f(x)D_i v(x)dx = \int_\Omega \psi(x)v(x)dx \tag{27}$$

と書く．ここで

$$\psi = \sum_{i=1}^d (b^i + c^i)D_i f + \Big(\sum_{i=1}^d D_i b^i + d\Big)f - k.$$

仮定より任意の $\Omega_0 \Subset \Omega$ で $\psi \in L^2(\Omega_0)$ なので，f は

$$Lf = \psi \quad (\Omega_0 \text{ 上})$$

の弱解で，右辺は L^2 に属する．定理 23.9 より 局所的に(つまり，$\forall\Omega_0 \Subset \Omega$ で) $f \in W^{2,2}$．(局所的に) $\psi \in W^{1,2}$ なので，定理 23.10 より $f \in W^{3,2}$ で，$\psi \in W^{2,2}$．再び定理 23.10 より，$f \in W^{4,2}$．以下同様に議論が繰り返せる.□

f が $\partial\Omega$ でも正則であることを示すには $\partial\Omega$ に適切な仮定を課す必要がある．まず，それを定式化する.

定義 23.12 有界開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ は，任意の $x_0 \in \partial\Omega$ に対して $r > 0$ が存在して，$\Phi : U(x_0, r) \to \mathbb{R}^d$ が以下の性質を満たすとき，$C^k (k = 0, 1, 2, \ldots\infty)$ 級であるという.

(i)　Φ，Φ^{-1} はともに C^k 級.

(ii)　$\Phi(\Omega \cap U(x_0, r)) \subset \{x = (x^1, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^d : x^d > 0\}$.

(iii) $\Phi(\partial\Omega \cap U(x_0, r)) \subset \{x = (x^1, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^d : x^d = 0\}$.

特に $\partial\Omega$ は，局所的に $\mathbb{R}^{d-1}$ の開集合と C^k 微分同相であるという意味で $d-1$ 次元である．$d > 1$ のとき，C^k 級であれば，孤立した境界点を持たない．

定義 23.13 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を C^k 級とする．$\ell \leq k$ に対して，写像 $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ が $C^\ell(\overline{\Omega})$ とは $g \in C^\ell(\Omega)$ で，任意の $x_0 \in \partial\Omega$ で $g \circ \Phi^{-1} : \{x = (x^1, \ldots, x^d) = x^d \geq 0\} \to \mathbb{R}$ が C^ℓ．ここで Φ は定義 23.12 に現れたもの．

以下の大域的な結果を得る．(ここで「大域的」とは，$\overline{\Omega}$ 上の性質であることを意味する．Ω の相対コンパクト部分集合上の性質は「局所的」という.)

定理 23.14 $g \in W^{2,2}(\Omega)$，$k \in L^2(\Omega)$，で有界開集合 Ω が C^2 級とする．f が $\Delta f = k$ の弱解で，$f - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$ とする．このとき $f \in W^{2,2}(\Omega)$ で

$$\|f\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq c(\|k\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{W^{2,2}(\Omega)}). \tag{28}$$

ここで c は d と Ω による定数.

証明 まず，問題を $f \in H_0^{1,2}(\Omega)$ の場合の証明に帰着する．そうでない場合は $\tilde{f} = f - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$ を考える．

$$\Delta\tilde{f} = \Delta f - \Delta g = k - \Delta g = \tilde{k} \in L^2(\Omega)$$

であり $\|\tilde{k}\|_{L^2} \leq \|k\|_{L^2} + \|g\|_{W^{2,2}(\Omega)}$．$\tilde{f}$ は，f と同じ仮定を満たし，明らかに f の $W^{2,2}$ ノルムは，$\tilde{f}$ と g の $W^{2,2}$ ノルムで押さえられる．よって，$f \in H_0^{1,2}(\Omega)$ と仮定してよい．

$x_0 \in \partial\Omega$ とする．Ω は仮定より C^2 なので，C^2 級微分同相写像 Φ が存在して，$\Phi(x_0) = 0$,

$$\Phi : U(x_0, r) \to \Phi(U(x_0, r)) \subset \mathbb{R}^d \quad (r > 0)$$

が定義 23.12 の性質を満たす．22 章のときと同様に，ラプラス作用素 Δ を座標変換 Φ^{-1} によって書き直す．写像 $\overline{f} := f \circ \Phi^{-1}$ は，22 章の最後で考察したように，

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \overline{f}) = k$$

を弱い意味で満たす．$a^{ij} := \sqrt{g} g^{ij}, \overline{k} := \sqrt{g} k$（特に $a^{ij} \in C^1$）なので

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^i}(a^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \overline{f}) = \overline{k}. \tag{29}$$

$\Phi(U(x_0, r))$ は 0 を含む開集合で，(29) 式が $U^+(0, R) := \{(x^1, \ldots, x^d) \in U(0, R) : x^d > 0\}$ 上成り立つような，$R > 0$ が存在する．さらに，定数 $\lambda > 0$, $K < \infty$ が存在して (15)，(17) が $U^+(0, R)$ で成り立つ．定数 λ，K は $\partial\Omega$ の幾何的な量に依存する（行列 (g^{ij}) は Φ が微分同相なので，正定値．また同様の理由で $g = \det(g_{ij})$ も正定値）．

以下のことに注意する．

$\eta \in C_0^1(U(0, R))$ であれば $\eta \overline{f} \in H_0^{1,2}(U^+(0, R))$.

つまり $\overline{f}$ が $x^d = 0$ で消えていれば，η に対して $x^d = 0$ で消えていることを要請する必要はない．

$1 \leq i \leq d-1$ で $|h| <$ dist $(\operatorname{supp} \eta, \partial U(0, R))$ とすると，

$$\eta^2 \Delta_i^h \overline{f} \in H_0^{1,2}(U^+(0, R)).$$

これより，定理 23.9 の証明での議論をそのままなぞることで，対応する $D_{ij} \overline{f} \in L^2(U(0, \frac{R}{2}))$ に対する評価を得る．ただし i，j の少なくとも一方は d と異なるとする．最後に $D_{dd} \overline{f}$ を評価するために，(29) を

$$\frac{\partial^2}{(\partial x^d)^2} \overline{f} = \frac{1}{a^{dd}} \{\overline{k} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j) \neq (d,d)}}^{d} \frac{\partial}{\partial x^i}(a^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \overline{f}) - (\frac{\partial}{\partial x^d} a^{dd}) \frac{\partial \overline{f}}{\partial x^d}\} \tag{30}$$

と書き直す．(30) の右辺の L^2 ノルムの評価はすぐ上で得たので，$D_{dd} \overline{f}$ の L^2 ノルムの評価をすることができる．

これより

$$\|\overline{f}\|_{W^{2,2}(U^+(0, \frac{R}{2}))} \leq c_4(\|\overline{k}\|_{L^2(U^+(0,R))} + \|\overline{f}\|_{W^{1,2}(U^+(0,R))}).$$

しかし，ここで

$$\|f\|_{W^{2,2}(\Phi^{-1}(U^+(0, \frac{R}{2})))} \leq c_5 \|\overline{f}\|_{W^{2,2}(U^+(0, \frac{R}{2}))}.$$

ただし，c_5 は Φ とその 1 階，2 階微分による定数である．これより，任意の $x_0 \in \partial\Omega$ に対して，近傍が存在して，その上で f の $W^{2,2}$ ノルムを k の L^2 ノルムと f の $W^{1,2}$ ノルムで評価できることがわかる．Ω は有界なので $\partial\Omega$ はコンパクトで，特に有限個の上のような近傍で覆うことができる．

定理 23.5 による内部の評価と併せて

$$\|f\|_{W^{2,2}(\Omega)} \le c_6(\|k\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{1,2}(\Omega)}). \tag{31}$$

ポアンカレの不等式(系 20.16)より，$f \in H_0^{1,2}(\Omega)$ なので

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \le c_7\|Df\|_{L^2(\Omega)} \tag{32}$$

を得る．c_7 は Ω の大きさによる定数である．

最後に $f \in H_0^{1,2}(\Omega)$ であることより

$$\begin{aligned} \|Df\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega Df \cdot Df = \int_\Omega k \cdot f \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega k^2 + \varepsilon\int_\Omega f^2 \end{aligned} \tag{33}$$

が，任意の $\varepsilon > 0$ で成立する．ε を十分小さく選ぶと，(32)，(33)より

$$\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le c_8\|k\|_{L^2(\Omega)} \tag{34}$$

を得，よって(31)より

$$\|f\|_{W^{2,2}(\Omega)} \le c_9(\|k\|_{L^2(\Omega)}) \tag{35}$$

を得る．これは $f \in H_0^{1,2}(\Omega)$ の場合の(28)であり，最初に見た通り，定理の証明はこの場合に帰着する． □

定理 23.15 Ω は $\mathbb{R}^d$ の C^∞ 級有界開集合とし，$k, g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ とする．このときディリクレ問題

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= k(x) \quad (x \in \Omega) \\ f(x) &= g(x) \quad (x \in \partial\Omega) \end{aligned}$$

には唯一つの解が存在し，$C^\infty(\overline{\Omega})$ 級となる．

証明　前の章で

$$\Delta f = k \quad (\Omega \text{ 上}),$$
$$f - g \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

に唯一つの弱解が存在することを見た．したがって正則性のみを示せば良い．前と同様，ソボレフの埋め込み定理と定理 23.14 の議論を繰り返し使うことで示せる．定理 23.14 の証明を使うために，まず，定理 23.14 の証明の最初と同様，f が $H_0^{2,2}(\Omega)$ に属している場合に問題を帰着する．このためには，定理 23.14 の記号を使うと $\eta \in C_0^1(U(0,R))$ と $1 \le i \le d-1$ に対して

$$\eta D_i \overline{f} \in H_0^{1,2}(U^+(0,R))$$

を示せば十分である．補題 23.3 より，十分小さな $|h|$ で

$$\eta \Delta_i^h \overline{f} \in H_0^{1,2}(U^+(0,R)),$$

$$\|\eta \Delta_i^h \overline{f}\|_{W^{1,2}(U^+(0,R))} \le \|\eta\|_{C^1(U^+(0,R))} \cdot \|\overline{f}\|_{W^{2,2}(U^+(0,R))}.$$

よって，定理 21.8 より，$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ となる列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，$\eta \Delta_i^{h_n} \overline{f}$ は弱い意味で $H_0^{1,2}(U^+(0,R))$ で収束する．

この列の極限は $\eta D_i \overline{f}$ で，$H_0^{1,2}$ が弱収束に関して閉であることより $\eta D_i \overline{f} \in H_0^{1,2}(U^+(0,R))$．よって $f \in H_0^{2,2}(\Omega)$ で，定理 23.14 の議論を $D_i f$, $i = 1, \ldots, d-1$ に適用できる．$D_{dd} f$ は以前と同様，微分方程式より評価できる．

このように定理 23.14 の証明を繰り返すことで $f \in W^{m,2}(\Omega)$，$f - g \in H_0^{m,2}(\Omega)$ が，任意の $m \in \mathbb{N}$ で成立．系 20.18 より主張の証明が完結する．□

まったく同様の主張が，作用素

$$Lf = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} f\right) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^i}(b^i f) + \sum_{i=1}^{d} c^i \frac{\partial}{\partial x^i} f + ef \qquad (36)$$

に対して成立する．ただし係数 $a^{ij}, b^i, c^i, e.$ は適当な正則条件を満たすとする．もちろん (28) の右辺には $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ の項が加わる．

このような項は一般に必要であることは，すでに微分方程式

$$f''(t) + \lambda^2 f(t) = 0, \quad 0 < t < \pi$$
$$f(0) = 0, f(\pi) = 0$$

で見た．ここで $\lambda > 0$ とする．$\lambda \in \mathbb{Z}$ に対する解は，任意の α を用いて $f(t) = \alpha \sin(\lambda t)$ で与えられる．

このような作用素 L の正則性の証明は読者にとって良い演習であろう．

23 章の演習

1) (36) の作用素 L の正則性の証明を行え．

2) 方程式

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{d} D_i k^i, \quad (\, k^i \in L^2(\Omega),\ i = 1, \dots, d)$$

の弱解を定義せよ．k^i に関する適切な仮定の下で弱解の正則性を示せ．

第 24 章

最大値原理

［ホップ(E. Hopf)の強最大値原理は，楕円型偏微分方程式(PDE)の解は内部で最大値をとらことはないことを主張する．最大値原理を用いて，このような偏微分方程式に関して特異点の除去，勾配の評価，リウヴィル(Liouville)の定理「ユークリッド空間全域で定義された有界調和関数は定数である」などを導く．］

Ω を $\mathbb{R}^d$ の開集合とする．この章では線形楕円型微分作用素

$$Lf(x) = \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{d} b^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

で以下の条件を満たすものを考える．

（i） $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ がすべての i, j, x で成立する．（これが本質的に制限を加えるものでないことは，すでに機会のあるごとに注意してきた.）

（ii） 一様楕円性．定数 $0 < \lambda \leq \mu < \infty$ が存在して

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x)\xi^i\xi^j \leq \mu|\xi|^2$$

が，任意の $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d$ に対して成立する．

（iii） 定数 K が存在して

$$|b^i(x)| \leq K \quad (\ x \in \Omega,\ i \in \{1, \ldots, d\}).$$

前章で見た作用素は

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sum_{j=1}^{d} a^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) + \cdots$$

の形の作用素であったので，ここで考察する作用素とは異なることを明記しておく．

まず**弱最大値原理**を学ぶ．

定理 24.1 Ω を有界集合，$f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ は

$$Lf \geq 0 \ (\Omega \text{ 上})$$

を満たすとする．このとき f は最大値を $\partial\Omega$ でとる．つまり

$$\sup_{x \in \Omega} f(x) = \max_{x \in \partial\Omega} f(x). \tag{1}$$

$Lf \leq 0$ のとき，最小値に対して同様の結果が成立する．

証明 Ω で $Lf > 0$ となる場合を最初に考える．この場合，f が Ω の内部で最大値をとらないことを主張する．内部の最大値をとる点 x_0 が存在すれば

$$Df(x_0) = 0$$

$$D^2 f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\right)_{i,j=1,\dots,d}$$

は半負定値．

行列 $A = (a^{ij}(x_0))$ は仮定より正定値

$$\begin{aligned} Lf(x_0) &= \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) \\ &= \operatorname{Tr}\,(A \cdot D^2 f(x_0)) \leq 0 \end{aligned}$$

(Tr は行列のトレースを表す), これは $Lf(x_0) > 0$ に矛盾する．よって，この場合 f は Ω の内部で最大値をとれない．

$\alpha =$ 定数 に対して

$$Le^{\alpha x^1} = (\alpha^2 a^{11}(x) + \alpha b^1(x)) e^{\alpha x^1} \geq (\lambda \alpha^2 - K\alpha) e^{\alpha x^1}$$

が (ii)，(iii) より成立する．

特に，十分大きな α に対して

$$Le^{\alpha x^1} > 0. \tag{2}$$

(2)が成立する α を一つ固定する．任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$L(f(x) + \varepsilon e^{\alpha x^1}) > 0.$$

すでに示したことより

$$\sup_{x\in\Omega}(f(x) + \varepsilon e^{\alpha x^1}) = \max_{x\in\partial\Omega}(f(x) + \varepsilon e^{\alpha x^1}).$$

(1)は $\varepsilon \to 0$ とすることで従う． □

系 24.2 $f, g \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, Ω は有界集合とする．

$$\Omega \text{ 上} \quad Lf \geq Lg \tag{3}$$

$$y \in \partial\Omega \text{ 上} \quad f(y) \leq g(y) \tag{4}$$

であるとき

$$f(x) \leq g(x) \qquad (x \in \Omega). \tag{5}$$

(3)のかわりに $Lf = Lg$ が Ω で，(4)のかわりに $f = g$ が $\partial\Omega$ で成り立つとすると Ω で $f = g$.

特に，ディリクレ問題：与えられた $k \in C^0(\Omega)$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ に対して

$$Lf(x) = k(x) \quad (x \in \Omega),$$
$$f(x) = \varphi(x) \quad (x \in \partial\Omega)$$

は唯一つの解を持つ．

証明 $L(f-g) \geq 0$ を得る．定理 24.1 と(4)を併せて，

$$\sup_{x\in\Omega}(f(x) - g(x)) = \max_{y\in\partial\Omega}(f(y) - g(y)) \leq 0$$

を得る．これは(5)を意味する．残りの主張も容易に従う． □

定義 24.3 $f \in C^2(\Omega)$ は Ω で $Lf \geq 0$ を満たすとき $Lf = 0$ の劣解といい，$Lf \leq 0$ のとき $Lf = 0$ の優解という．$\Delta f = 0$ の劣解，優解をそれぞれ劣調和，優調和という．

上の定義は以下の事実に基づいている．

Ω で $\Delta h=0, \Delta f \geq 0$ で，$\partial\Omega$ 上 $f=h$ のとき，系 24.2 より $f \leq h$ となることがわかる．したがって劣調和関数は常に同じ境界条件を持つ調和関数の下側にある．

例　1) $\beta \in \mathbb{R}$，$x \in \mathbb{R}^d$ に対して $\Delta|x|^\beta=(d\beta+\beta(\beta-2))|x|^{\beta-2}$．$\beta \geq 2$ のとき，これは $x=0$ でも定義できて $\Delta|x|^\beta \geq 0$．したがって $\beta \geq 2$ のとき $|x|^\beta$ は劣調和関数.

2) $f:\Omega \to \mathbb{R}$ を正値調和関数，$\alpha \geq 1$ とする．

$$
\begin{aligned}
\Delta f^\alpha &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x^i}(\alpha f^{\alpha-1} f_{x^i}) \\
&= \sum_{i=1}^d (\alpha(\alpha-1) f^{\alpha-2} f_{x^i} f_{x^i} + \alpha f^{\alpha-1} f_{x^i x^i}) \\
&= \sum_{i=1}^d \alpha(\alpha-1) f^{\alpha-2} f_{x^i} f_{x^i}, \quad (f\text{ は調和関数なので}) \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

したがって $\alpha \geq 1$，正値調和関数 f に対して f^α は劣調和関数.

3) 正値関数 $f:\Omega \to \mathbb{R}$ に対して

$$\Delta \log f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{f_{x^i}}{f}\right) = \sum_{i=1}^d \left(\frac{f_{x^i x^i}}{f} - \frac{f_{x^i} f_{x^i}}{f^2}\right).$$

したがって f が調和であれば，$\log f$ は優調和.

最大値原理の応用としてラプラス作用素の孤立特異点の除去可能性を示す.

定理 24.4　$x_0 \in \mathbb{R}^d, d \geq 2, R > 0$ とし

$$f : U(x_0, R) \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$$

を有界な調和関数とする．このとき f は点 x_0 で調和拡張を持つ．つまり，調和写像

$$h : U(x_0, R) \to \mathbb{R}$$

が存在して $U(x_0, R)\backslash\{x_0\}$ で $h = f$.

証明　ラプラス方程式は平行移動と相似変換で不変なので，$x_0 = 0$，$R = 2$ と仮定してよい．

$$\overline{f} : B(0,1) \to \mathbb{R}$$

をディリクレ問題

$$\Delta\overline{f} = 0 \quad (U(0,1)\text{ 上}) \tag{6}$$
$$\overline{f}(x) = f(x) \quad (x \in \partial B(0,1))$$

の解とする．$\overline{f}$ が存在することは 23 章で示した（定理 23.15．系 23.7 より f は $\partial B(0,1)$ のある近傍で C^∞ であることに注意する）．

さらに $x \neq 0$ に対して

$$g(x) := \begin{cases} \log\frac{1}{\|x\|} & d = 2 \\ (\|x\|^{2-d} - 1) & d \geq 3 \end{cases}$$

は調和であることを思い出す（9 章を参照）．

$$f_\varepsilon(x) := \overline{f}(x) + \varepsilon g(x) \tag{7}$$

とおく．任意の ε に対して，$\|x\| = 1$ で $g(x) = 0$ なので

$$f_\varepsilon(x) = \overline{f}(x) = f(x) \quad (\|x\| = 1), \tag{8}$$

$$\lim_{x\to 0} f_\varepsilon(x) = \infty \quad (\forall\, \varepsilon > 0). \tag{9}$$

仮定より，$f(x)$ は有界なので，各 $\varepsilon > 0$ に対して $r = r(\varepsilon) > 0$ が存在して，

$$f_\varepsilon(x) > f(x) \quad (\|x\| \leq r). \tag{10}$$

最後に，$0 < \|x\| \leq 1$ で $\frac{\partial}{\partial r}g(x) < 0$，$f$ は C^∞ 関数なので，特にその微分は有界（系 23.7）であることを使うと，十分大きい ε に対して

$$f_\varepsilon(x) > f(x) \quad (0 < \|x\| < 1) \tag{11}$$

となる．

$$f_{\varepsilon_0}(x) \geq f(x) \quad (0 < \|x\| \leq 1) \tag{12}$$

となる最小の $\varepsilon_0 \geq 0$ を選ぶ．上の考察からこのような ε_0 は存在する．

ε_0 が正であるとすると，(8) より $y_0 \in U(0,1)\backslash\{0\}$ が存在して

$$f_{\varepsilon_0/2}(y_0) < f(y_0) \tag{13}$$

を満たす．よって

$$\inf_{x \in U(0,1)\backslash B(0,r(\varepsilon_0/2))} (f_{\varepsilon_0/2}(x) - f(x)) < 0.$$

一方 (8)，(10) より

$$\min_{y \in \partial B(0,1) \cup \partial B(0,r(\varepsilon_0/2))} (f_{\varepsilon_0/2}(y) - f(y)) = 0.$$

$f_{\varepsilon_0/2} - f$ は $U(0,1)\backslash B(0,r(\varepsilon_0/2))$ で調和なので，これは系 24.2 に矛盾する．

したがって $\varepsilon = 0$ で

$$\overline{f} = f_0 \geq f \quad (U(0,1)\backslash\{0\}).$$

同様に

$$\overline{f} \leq f \quad (\,U(0,1)\backslash\{0\})$$

を証明できる．$U(0,1)\backslash\{0\}$ で $\overline{f} = f$ であり，

$$h := \begin{cases} f & U(0,2)\backslash\{0\} \\ \overline{f} & U(0,1) \end{cases}$$

が求める性質を満たす．　□

例　特に以下のディリクレ問題は解を持たないことがわかる．$f : B(0,1) \to \mathbb{R}$ で

$$\Delta f(x) = 0 \quad (U(0,1)\backslash\{0\}),$$
$$f(y) = 0 \quad (\|y\| = 1\text{ 上}),$$
$$f(0) = 1.$$

定理 24.4 より，この方程式の解は調和拡張 $h: B(0,1) \to \mathbb{R}$ を持つ．つまり $U(0,1)$ で $\Delta h(x) = 0$，$\|y\| = 1$ で $h(y) = 0$，一方系 24.2 より $B(0,1)$ で $h \equiv 0$．特に $h(0) = 0 \neq 1$.（この例に関連して，定義 22.8 の前の議論を思い出すこと.）

最大値原理から得られる結果として，ポアソン方程式の解の勾配の評価がある．

定理 24.5 有界関数 k に対して $f \in C^2(U(x_0,r)) \cap C^0(B(x_0,r))$ が $U(x_0,r)$ 上

$$\Delta f(x) = k(x)$$

を満たすとする．$i = 1, \ldots, d$ に対して

$$|\frac{\partial}{\partial x^i} f(x_0)| \leq \frac{d}{r} \sup_{\partial B(x_0,r)} |f| + \frac{r}{2} \sup_{B(x_0,r)} |k|. \tag{14}$$

証明 $x_0 = 0$，$i = d$ と仮定してよい．

$$U^+(0,r) := \{x = (x^1, \ldots, x^d) : \|x\| < r, x^d > 0\}$$

とおき，$x = (x^1, \ldots, x^d)$ に対して $x' := (x^1, \ldots, x^{d-1})$ とする．$M := \sup_{\partial B(0,r)} |f|, K := \sup_{B(0,r)} |k|$,

$$g(x) := \frac{1}{2}(f(x', x^d) - f(x', -x^d)),$$
$$\varphi(x) := \frac{M}{r^2}\|x\|^2 + x^d(r - x^d)(\frac{dM}{r^2} + \frac{K}{2})$$

とおく．このとき

$$\Delta\varphi(x) = -K \quad (\ U^+(0,r)),$$
$$\varphi(x',0) \geq 0 \quad (\forall\ x'),$$
$$\varphi(x) \geq M \quad (\ \|x\| = r, x^d \geq 0).$$

$$
\begin{aligned}
|\Delta g(x)| &\le K \quad (U^+(0,r)\ \text{上}),\\
g(x',0) &= 0 \quad (\forall\ x'),\\
|g(x)| &\le M \quad (\ \|x\| = r, x^d \ge 0).
\end{aligned}
$$

これらを併せると

$$
\begin{aligned}
\Delta(\varphi \pm g) &\le 0 \quad (U^+(0,r)\ \text{上}),\\
\varphi \pm g &\ge 0 \quad (\partial U^+(0,r)\ \text{上}).
\end{aligned}
$$

最大値原理より

$$
|g(x)| \le \varphi(x) \quad (U^+(0,r)\ \text{上}).
$$

これより

$$
\left|\frac{\partial}{\partial x^d} f(0)\right| = \lim_{\substack{x^d \to 0\\ x^d > 0}} \left|\frac{g(0,x^d)}{x^d}\right| \le \lim_{\substack{x^d \to 0\\ x^d > 0}} \frac{\varphi(0,x^d)}{x^d} = \frac{dM}{r} + \frac{r}{2}K.
$$

□

リウヴィル(Liouville)の定理はこの定理の直接の結果である.

系 24.6 $\mathbb{R}^d$ 上の有界調和関数は定数関数である.

証明　$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| \le M$ となる調和関数とする.

(14)より

$$
\left|\frac{\partial}{\partial x^i} f(x_0)\right| \le \frac{dM}{r} \tag{15}
$$

が各 $i \in \{1, \ldots, d\}$ と $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ に対して成立する.

$r \to \infty$ とすると $\frac{\partial}{\partial x^i} f \equiv 0$. よって f は定数. □

調和関数の微分はまた調和関数なので, 高階微分に関する評価も容易に得られる.

系 24.7 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を調和関数, $\Omega' \Subset \Omega$, $\delta := \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ とする. 多重指数 $\alpha \in \mathbb{N}^d$ に対して

$$
\sup_{\Omega'} |D^\alpha f| \le \left(\frac{d|\alpha|}{\delta}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |f|.
$$

証明 $\alpha = (1,1,0,\ldots,0)$ の場合を考える．一般の場合は同じ議論を繰り返すことにより確かめられる．$x_0 \in \Omega'$，$r = \frac{\delta}{2}$ とする．(14)を調和関数 $\frac{\partial}{\partial x^1} f$ に適用すると

$$|\frac{\partial}{\partial x^2}(\frac{\partial}{\partial x^1} f(x_0))| \leq \frac{2d}{\delta} \sup_{y \in \partial B(x_0, \frac{\delta}{2})} |\frac{\partial f}{\partial x^1}(y)|. \tag{16}$$

各 $y \in \partial B(x_0, \frac{\delta}{2})$ に対して $B(y, \frac{\delta}{2}) \subset \Omega$ なので，(14)を再び f に適用すると

$$\sup_{y \in \partial B(x_0, \frac{\delta}{2})} |\frac{\partial f}{\partial x^1}(y)| \leq \frac{2d}{\delta} \sup_{z \in \Omega} |f(z)|. \tag{17}$$

(16)と(17)を併せて求める結果を得る． □

系 24.8 $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ を調和関数の有界列($\sup_{x \in \Omega} |f_n(x)| \leq K \ \forall n$)とするとき，任意のコンパクト部分集合上一様に調和関数に収束する部分列が存在する．特に調和関数の一様収束に関する極限は再び調和関数である．

証明 系 24.7 より，(f_n) のすべての偏微分は $\Omega' \Subset \Omega$ で同等連続．アルツェラ・アスコリの定理より C^2 収束する部分列を得る．これは極限が調和関数であることを意味する．任意の $\Omega' \Subset \Omega$ に対して同じ部分列をとれることを示すために，定石の対角線論法を使おう．

$\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \cdots \ \ \Omega_n \Subset \cdots \Omega$ を

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \tag{18}$$

とする．部分列 $(f_{1,n})$ of (f_n) で Ω_1 で収束するものが存在し，$(f_{1,n})$ の部分列 $(f_{2,n})$ で Ω_2 で収束するものが存在し，等々．部分列 $(f_{n,n})$ はすべての Ω_m で収束し，(18)より任意の $\Omega' \Subset \Omega$ で収束する． □

注意 系 24.8 はソボレフの埋め込み定理を使っても証明できる．23 章の積分の評価式を使えばよい．

以下に定理 24.1 の一般化を今後のために用意する．

系 24.9 $c : \Omega \to \mathbb{R}$ を非負関数とする．L が定理 24.1 の直前に述べた仮定を満たし，$f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ は

$$Lf(x) - c(x)f(x) \geq 0$$

であるとする．このとき，$f^+ := \max(f, 0)$ に対して

$$\sup_{\Omega} f^+ \leq \max_{\partial\Omega} f^+.$$

証明　$\tilde{\Omega} := \{x \in \Omega : f(x) > 0\}$ とする．$\tilde{\Omega}$ 上，c が非負なので

$$Lf \geq 0$$

であり，定理 24.1 より

$$\sup_{\tilde{\Omega}} f \leq \max_{\partial\tilde{\Omega}} f.$$

$\tilde{\Omega}$ の境界は二つの部分

$$\partial_1\tilde{\Omega} := \partial\tilde{\Omega} \cap \Omega$$

$$\partial_2\tilde{\Omega} := \partial\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega \subset \partial\Omega$$

よりなる．

$$f\big|_{\partial_1\tilde{\Omega}} = 0,$$

$$\max_{\partial_2\tilde{\Omega}} f \leq \max_{\partial\Omega} f$$

を得，したがって

$$\max_{\partial\tilde{\Omega}} f \leq \max_{\partial\Omega} f^+$$

であり，また

$$\sup_{\Omega} f^+ = \sup_{\tilde{\Omega}} f.$$

これより結果が従う．□

ここで，**強最大値原理**を示そう．できる限り証明をわかりやすくするために，ラプラス作用素の場合のみ考察する．この章の最初に述べた性質を持つ作用素 L に対して対応する主張がまったく同様にして示せる．

定理 24.10　$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とし，$f : \Omega \to \mathbb{R}$ は

$$\Delta f \geq 0 \ (\Omega \text{ 上}) \tag{19}$$

を満たすものとする．f が Ω の内部で最大値をとれば f は定数．より一般に $c:\Omega\to\mathbb{R}$ が非負関数で

$$\Delta f(x)-c(x)f(x)\geq 0\ (\forall\, x\in\Omega) \tag{20}$$

を満たすとし，また f が Ω の内部で非負最大値をとるとき，f は定数である．

まず，ホップ(E. Hopf)の境界点補題を導く．

補題 24.11 $\tilde{\Omega}\subset\mathbb{R}^d$ で $\Delta f-cf\geq 0$ が，ある非負関数 $c:\tilde{\Omega}\to\mathbb{R}$ に対して成立するとし，さらに $x_0\in\partial\tilde{\Omega}$ で

(i) f は x_0 で連続．

(ii) $c(x)\not\equiv 0$ のとき $f(x_0)\geq 0$.

(iii) $f(x_0)>f(x)$ がすべての $x\in\tilde{\Omega}$ で成立．

(iv) 球体 $U(y,R)\subset\tilde{\Omega}$ で $x_0\in\partial U(y,R)$ となるものが存在する．

以上を仮定する．このとき $r(x)=\|x-y\|$ に対して，微分が($\tilde{\Omega}$ の外向き法ベクトル方向に)存在すれば

$$\frac{\partial f}{\partial r}(x_0)>0. \tag{21}$$

証明 (iv)の y，R を $\partial U(y,R)\cap\partial\tilde{\Omega}=\{x_0\}$ となるようにとる．$x\in U(y,R)\backslash B(y,\rho)$ $(0<\rho<R)$ に対して，補助関数

$$g(x):=e^{-\gamma\|x-y\|^2}-e^{-\gamma R^2}$$

を考える．すると，

$$\Delta g-cg=(4\gamma^2\|x-y\|^2-2d\gamma-c)e^{-\gamma\|x-y\|^2}+ce^{-\gamma R^2}.$$

よって，十分大きい γ に対して

$$\Delta g-cg\geq 0\quad (U(y,R)\backslash B(y,\rho)\ \text{上}). \tag{22}$$

(iii)，(iv)より

$$f(x)-f(x_0)<0 \quad (x\in\partial B(y,\rho)).$$

したがって，ある $\varepsilon>0$ が存在して

$$f(x)-f(x_0)+\varepsilon g(x)\le 0\ (\ x\in\partial B(y,\rho)) \tag{23}$$

が成り立つ．(iii)，(iv)より $\partial B(y,R)$ 上 $g=0$ なので，(23)が $x\in\partial B(y,R)$ に対しても成り立つ．

一方(ii)より

$$\Delta(f(x)-f(x_0)+\varepsilon g(x))-c(x)(f(x)-f(x_0)+\varepsilon g(x))$$
$$\ge c(x)f(x_0)\ge 0$$

が $x\in U(y,R)\backslash B(y,\rho)$ に対して成り立つ．$\partial(B(y,R)\backslash B(y,\rho))$ 上 $f(x)-f(x_0)+\varepsilon g(x)\le 0$ なので系24.9より

$$f(x)-f(x_0)+\varepsilon g(x)\le 0 \quad (x\in B(y,R)\backslash B(y,\rho)).$$

これより(微分が存在すれば)

$$\frac{\partial}{\partial r}(f(x)-f(x_0)+\varepsilon g(x))\ge 0 \quad (x=x_0\ \in\partial B(y,R)\text{ で}).$$

よって

$$\frac{\partial}{\partial r}f(x_0)\ge -\varepsilon\frac{\partial g(x_0)}{\partial r}=\varepsilon(2\gamma Re^{-\gamma R^2})>0.$$

定理24.10の証明　定理を証明するために，f は定数ではなく，最大値 m ($c\ne 0$ ならば $m\ge 0$)を Ω の内部でとると仮定しよう．このとき

$$\tilde{\Omega}:=\{x\in\Omega: f(x)<m\}\ne\emptyset$$

$$\partial\tilde{\Omega}\cap\Omega\ne\emptyset.$$

$y\in\tilde{\Omega}$ を $\partial\Omega$ より $\partial\tilde{\Omega}$ に近いとし，$U(y,R)$ を $\tilde{\Omega}$ に含まれる中心 y の球体で最大のものとする．

$$f(x_0)=m\ (\exists\, x_0\in\partial B(y,R))$$

で $x \in \tilde{\Omega}$ に対して $f(x) < f(x_0)$.

(21)を適用し

$$df(x_0) \neq 0$$

を得るが，これは内部で最大値をとることがないことを示している．明らかに，非自明な固有関数が存在するので定理 24.10 における仮定 $c \geq 0$ は必要条件である．例えば $f(x) = \sin x$ は $(0, \pi)$ 上

$$f''(x) + f(x) = 0$$

を満たすが，f は正の最大値を $x = \frac{\pi}{2}$ でとる．

24 章の演習

1) 強最大値原理を

$$L = \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{d} b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

の形の作用素で，この章の最初に挙げた条件(i)～(iii)を満たすものに対して示せ．

2) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は調和関数で勾配が有界なものとする．このとき f はアフィン線形，つまり $f(x) = \sum_{i=1}^{d} a_i x^i + b$ となる定数 $a_1, \ldots, a_d, b$ が存在することを示せ．

第25章

ラプラス作用素の固有値問題

［ レリッヒの埋め込み定理を用いて開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上の L^2 関数を，Ω 上のラプラス作用素の固有関数を用いて展開できることを見る. ］

最初に線形代数における以下の結果を思い出そう.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathbb{R}^d$ のユークリッド内積とし，A を $d \times d$ 対称行列とすると

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \ (\forall\ x, y \in \mathbb{R}^d) \tag{1}$$

である. $\mathbb{R}^d$ は A の固有ベクトルからなる正規直交基底 $v_1, \ldots, v_d$ を持つ. よって

$$Av_i + \lambda_i v_i = 0 \quad (\exists \lambda_i \in \mathbb{R}), \tag{2}$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad (\forall\ i, j). \tag{3}$$

この事実の無限次元ヒルベルト空間における類似を考えよう. 以下の考察は，より一般の設定に拡張できるが，ここでは具体的な場合，つまりラプラス作用素の固有値問題についてのみ考えることにしよう.

Ω を $\mathbb{R}^d$ の有界開集合とする. Δ の $H_0^{1,2}(\Omega)$ における固有関数，つまり $f \in H_0^{1,2}(\Omega)$

$$\Delta f(x) + \lambda f(x) = 0 \quad (\forall\ x \in \Omega)$$

を調べたい. ここで λ は実定数.

以下，

$$H := H_0^{1,2}(\Omega),\ \langle f, g \rangle := \int_\Omega f(x)g(x)dx, \quad (f, g \in L^2(\Omega)),$$

$$\|f\| := \|f\|_{L^2(\Omega)} = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$$

とおく．ラプラス作用素は対称作用素であることに注意する．例えば φ, ψ を $C_0^\infty(\Omega)$ 関数とするとき，

$$\langle \Delta\varphi, \psi\rangle = -\langle D\varphi, D\psi\rangle = \langle \varphi, \Delta\psi\rangle.$$

ここで，

$$\lambda_1 := \inf_{f\in H\setminus\{0\}} \frac{\langle Df, Df\rangle}{\langle f, f\rangle}$$

とおく．ポアンカレの不等式 (系 20.16) より

$$\lambda_1 > 0. \tag{4}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を最小列，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle Df_n, Df_n\rangle}{\langle f_n, f_n\rangle} = \lambda_1$$

とする．ここで

$$\|f_n\| = 1 \ (\forall\ n) \tag{5}$$

$$\|Df_n\| \leq K \ (\forall\ n) \tag{6}$$

と仮定して構わない．定理 21.8 より，部分列をとれば $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はヒルベルト空間 H で $v_1 \in H$ に弱収束し，レリッヒのコンパクト性定理より (定理 20.20) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2(\Omega)$ で v_1 に強収束する．(5) より

$$\|v_1\| = 1.$$

さらに，$\|Df\|_{L^2(\Omega)}$ の H での弱収束に関する下半連続性(系 21.9．ポアンカレの不等式より $\|Df\|_{L^2(\Omega)}$ が H のノルムとなっていることに注意)と，λ_1 の定義より

$$\lambda_1 \leq \langle Dv_1, Dv_1\rangle \leq \varliminf_{n\to\infty} \langle Df_n, Df_n\rangle = \lambda_1.$$

したがって

$$\frac{\langle Dv_1, Dv_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} = \lambda_1.$$

次に $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_{m-1}, v_{m-1})$ がすでに帰納的に定まっていて，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{m-1}$ および

$$\Delta v_i(x) + \lambda_i v_i(x) = 0 \quad (\Omega \text{ 上})$$

および

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\ (\forall\, i, j = 1, \ldots, m-1) \tag{8}$$

を満たしているとしよう．

$$H_m := \{f \in H : \langle f, v_i \rangle = 0\ i = 1, \ldots, m-1\}$$

$$\lambda_m := \inf_{f \in H_m \setminus \{0\}} \frac{\langle Df, Df \rangle}{\langle f, f \rangle}$$

とおく．二つの簡単な注意を与える．

（i） $H_m \subset H_{m-1}$ なので，

$$\lambda_m \geq \lambda_{m-1}. \tag{9}$$

（ii） H_m は有限次元部分空間の直交補空間なので閉（$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_m$ が f に収束すれば $\langle f_n, v_i \rangle = 0$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つので $\langle f, v_i \rangle = 0\ (i = 1, \ldots, m)$．したがって $f \in H_m$）であり，よってヒルベルト空間となる．

前と同様にして $\|v_m\| = 1$,

$$\lambda_m = \langle Dv_m, Dv_m \rangle = \frac{\langle Dv_m, Dv_m \rangle}{\langle v_m, v_m \rangle} \tag{10}$$

となる $v_m \in H_m$ を見つけることができる．

$$\Delta v_m + \lambda_m v_m = 0 \quad (\Omega\text{ 上}) \tag{11}$$

となることを見よう．まず，$\varphi \in H_m, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{\langle D(v_m + t\varphi), D(v_m + t\varphi) \rangle}{\langle v_m + t\varphi, v_m + t\varphi \rangle} \geq \lambda_m$$

であり，この式は t に関して微分可能（オイラー・ラグランジュ方程式の微分と思える）で，$t = 0$ で最小値をとる．よって

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\langle D(v_m + t\varphi), D(v_m + t\varphi)\rangle}{\langle v_m + t\varphi, v_m + t\varphi\rangle} \\
&= 2\Big(\frac{\langle Dv_m, D\varphi\rangle}{\langle v_m, v_m\rangle} - \frac{\langle Dv_m, Dv_m\rangle}{\langle v_m, v_m\rangle}\frac{\langle v_m, \varphi\rangle}{\langle v_m, v_m\rangle}\Big) \\
&= 2(\langle Dv_m, D\varphi\rangle - \lambda_m\langle v_m, \varphi\rangle)
\end{aligned}
$$

が，任意の $\varphi \in H_m$ に対して成立する．

一方 $i = 1, \dots, m-1$ で

$$\langle v_m, v_i\rangle = 0,$$

$$\langle Dv_m, Dv_i\rangle = \langle Dv_i, Dv_m\rangle = \lambda_i\langle v_i, v_m\rangle = 0.$$

任意の $\varphi \in H$ に対して

$$\langle Dv_m, D\varphi\rangle - \lambda_m\langle v_m, \varphi\rangle = 0. \tag{12}$$

これより v_m は

$$\int_\Omega Dv_m(x)D\varphi(x)dx - \lambda_m \int_\Omega v_m(x)\varphi(x)dx = 0 \quad (\forall\, \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega))$$

の解であることがわかる．系 23.8 より $v_m \in C^\infty(\Omega)$ で

$$\Delta v_m(x) + \lambda_m v_m(x) = 0 \ (\forall\, x \in \Omega). \tag{13}$$

補題 25.1 $\lim_{m\to\infty} \lambda_m = \infty$.

証明 そうでないとすると，(10) より

$$\|Dv_m\| \leq K \ (\forall\, m \in \mathbb{N})$$

となる．レリッヒのコンパクト性定理（定理 20.20）より，列 $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は部分列をとると，$L^2(\Omega)$ で収束する．極限を v とおく．

$$\lim_{m\to\infty} \|v_m - v\| = 0.$$

しかし，これは次のことに矛盾する．すなわち (8) を使うと $\langle v_\ell, v_m\rangle = \delta_{m\ell}$ であり $\ell \neq m$ に対し

$$\|v_\ell - v_m\|^2 = \langle v_\ell, v_\ell\rangle - 2\langle v_\ell, v_m\rangle + \langle v_m, v_m\rangle = 2.$$

これはコーシーの性質を満たさない．背理法より補題が証明できた． □

定理 25.2 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界開集合とする．固有値問題

$$\Delta f + \lambda f = 0, f \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

は可算個固有値と互いに直交する正規ベクトル v_m, が存在して

$$\langle v_m, v_\ell \rangle = \delta_{m\ell}, \tag{14}$$

$$\Delta v_m + \lambda_m v_m = 0 \quad (\Omega \text{ 上})$$

$$\langle Dv_m, Dv_\ell \rangle = \lambda_m \delta_{m\ell}. \tag{15}$$

固有値はすべて正数で

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m = \infty.$$

$f \in H_0^{1,2}(\Omega)$ なので

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, v_i \rangle v_i. \tag{16}$$

ここで，この列は $L^2(\Omega)$ で収束し

$$\langle Df, Df \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle f, v_i \rangle^2. \tag{17}$$

注意 式(16)は固有ベクトルが $L^2(\Omega)$ の完全正規直交基底を与えていることを意味している．これは，この章の最初に述べた有限次元の場合に対称作用素が固有ベクトルによる正規直交基底を持つことの一般化になっている．

証明 まず，(15)は(12)，(14)より従うことに注意する．したがって，(16)，(17)を示せばよい．$f \in H$ に対して，簡単のために

$$\alpha_i := \langle f, v_i \rangle \quad (i \in \mathbb{N})$$

とおき

$$f_m := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i,\ \varphi_m := f - f_m.$$

φ_m は，H における $v_1, \ldots, v_m$ と直交する部分空間 H_{m+1} への直交射影で

ある．よって

$$\langle \varphi_m, v_i \rangle = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{18}$$

また，λ_{m+1} の定義より

$$\langle D\varphi_m, D\varphi_m \rangle \ \geq \lambda_{m+1} \langle \varphi_m, \varphi_m \rangle. \tag{19}$$

(12)，(18) より

$$\langle D\varphi_m, Dv_i \rangle = 0 \ (i = 1, \ldots, m). \tag{20}$$

(18) より

$$\langle \varphi_m, \varphi_m \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f_m, f_m \rangle, \tag{21}$$

であり，(20) より

$$\langle D\varphi_m, D\varphi_m \rangle = \langle Df, Df \rangle - \langle Df_m, Df_m \rangle. \tag{22}$$

(19)，(20) から

$$\langle \varphi_m, \varphi_m \rangle \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \langle Df, Df \rangle$$

を得，補題 25.1 を使うと，列 φ_m は 0 に $L^2(\Omega)$ で収束する．これは

$$f = \lim_{m \to \infty} f_m = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, v_i \rangle v_i \quad (L^2(\Omega) \text{ で})$$

を意味し (16) を得る．さらに

$$Df_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i Dv_i$$

なので，(15) より

$$\begin{aligned} \langle Df_m, Df_m \rangle &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \langle Dv_i, Dv_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_i^2. \end{aligned} \tag{23}$$

(22) より $\langle Df_m, Df_m \rangle \leq \langle Df, Df \rangle$ ですべての λ_i は正で，

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2$$

は収束する．

$m \le n$ に関しては

$$\langle D\varphi_m - D\varphi_n, D\varphi_m - D\varphi_n\rangle = \langle Df_n - Df_m, Df_n - Df_m\rangle$$
$$= \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2.$$

したがって，(φ_m) だけでなく $(D\varphi_m)$ も $L^2(\Omega)$ のコーシー列で，φ_m は H で 0 に $H^{1,2}$ ノルムに関して収束する．

よって(22)より，

$$\langle Df, Df\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle Df_m, Df_m\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2 \ \text{（(23)と比較せよ）}.$$

最後に，これによりすべての固有値を見つけたことと固有ベクトルが v_i の線形結合で書けることを確かめる．

まず，異なる固有値に対応する固有ベクトルは L^2 直交する．つまり $v, w \neq 0$ が

$$\Delta v + \lambda v = 0\ ,\ \Delta w + \mu w = 0$$

を満たせば，任意の $\varphi \in H$ に対して

$$\langle Dv, D\varphi\rangle = \lambda\langle v, \varphi\rangle\ ,\ \langle Dw, D\varphi\rangle = \mu\langle w, \varphi\rangle.$$

よって

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Dv, Dw\rangle = \langle Dw, Dv\rangle = \mu\langle w, v\rangle$$

で，$\lambda \neq \mu$ のとき

$$\langle v, w\rangle = 0$$

を得る．

もし，固有値 λ で $\{\lambda_m\}$ に含まれないものがあったとする．対応する固有ベクトルを $v \neq 0$ とおくと，これは v_i の線形結合でないので $\langle v, v_i\rangle$ は，すべての i に関して 0 でなくてはならない．したがって(16)によって $v = 0$．これは矛盾である． □

上の証明での決め手はレリッヒのコンパクト性定理である．

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^{1,2}$, $\langle Df_n, Df_n\rangle$ が一様有界であれば，部分列は L^2 で収束する．したがって，$\langle Df, Df\rangle$，$\langle f, f\rangle$ のかわりに，ヒルベルト空間の双線形形式 $K(f, f)$，$B(f, f)$ で，前者は $\langle Df, Df\rangle$ のようにコンパクト性を持つものを考えることで，上の結果を簡単に一般化できる．

索　引

■記号一覧

$\mathbb{Z}$　3

$\mathbb{N}$　3

$\mathbb{R}$　3

$|\cdot|$　3, 53

(a,b)　3

(a,∞)　3

$(-\infty,b)$　3

$[a,b]$　3

$[a,\infty)$　3

$(-\infty,b]$　3

$\subset$　3

$\forall$　3

$\exists$　3

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$　3

$\lim_{n\to\infty} x_n$　4

$\mathbb{Q}$　4

$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$　5

$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$　5

$\sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu$　7

$\exp x = e^x$ 8, 9

$\log x$ 10

$\mathbb{R}^d$ 12

$\lim_{x \to p} f(x)$ 15

$C^0(D, \mathbb{R})$ 19

$C^0(D, \mathbb{C})$ 19

$C^0(D)$ 19

$C^{0,\alpha}(D, \mathbb{R})$ 19

$C^{0,\alpha}(D, \mathbb{C})$ 19

$C^{0,\alpha}(D)$ 19

$C^\alpha(D)$ 19

$f'(x)$ 25

$\frac{df}{dx}$ 25

$f''(x)$ 32

$\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$ 32

$f^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} f$ 32

$C^k(D, \mathbb{R})$ 33

$C^k(D)$ 33

$C^{k,\alpha}(D, \mathbb{R})$ 33

$C^{k,\alpha}(D)$ 33

$C^\infty(D, \mathbb{R})$ 33

$C^\infty(D)$ 33

$\| \cdot \|$ 52

$\|x\|_p$ 53

$\|x\|_\infty$ 53

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ 53

$d(x, y)$ 54, 91

$f_n \rightrightarrows f$ 56, 95

$\|f\|_K := \sup\{|f(x)| : x \in K\}$ 57

$C_b^0(K) := \{f \in C^0(K) : \|f\|_K < \infty\}$ 58

$\|f\|_{C^k(D)}$ 64

$C_b^k(D) := \{f \in C^k(D) : \|f\|_{C^k(D)} < \infty\}$ 64

$\|f\|_{C^{k,\alpha}(D)} := \|f\|_{C^k(D)} + \sup\limits_{\substack{x,y\in D\\ x\neq y}} \dfrac{|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)|}{|x-y|^\alpha}$ 64

$C_b^{k,\alpha}(D) := \{f \in C^{k,\alpha}(D) : \|f\|_{C^{k,\alpha}(D)} < \infty\}$ 64

$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi)d\xi$ 75

$\|x\|_p$ 92

$\|x\|_\infty$ 92

$x_n \to x$ 93

$\|L\| := \sup\{\|L(x)\|_W : \|x\|_V = 1\}$ 97

$B(V,W)$ 98

$U(x_0,r)$ 99

$B(x_0,r)$ 99

∂M 102

$\mathring{M} := M \setminus \partial M$ 102

$\bar{M} := M \cup \partial M$ 102

$Df(x_0)$ 121

$D_jf(a)$ 127

$D^2f(x_0)$ 129

Γ_f 135

$\langle x,y\rangle := \sum\limits_{i=1}^{d} x^i y^i$ 137

$D_v f(x)$ 137

$\nabla f(x)$ 137

$\operatorname{grad} f(x)$ 137

$D^2f(x) = (\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j})_{i,j=1,\dots,n}$ 140

Δ 145

$\Delta f := \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x^d)^2}$ 145, 329

$\operatorname{div} f(x)$ 150

$\operatorname{rot} f$ 150

$\dot{\gamma}(t) := D\gamma(t)$ 169

$L(\gamma) := \sup_Z L(\gamma, Z) < \infty.$ 171

$\chi_A(x)$ 185

$C_c(X)$ 187

$H_I(\mathbb{R}^d)$ 189

$H_S(\mathbb{R}^d)$ 189

I^d 193

$\int_W t(x)dx$ 194

$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$ 194, 196

$\int_A f(x)dx$ 203

$\int_a^b f(x)dx$ 203

Vol (K) 204

Vol $_d(K)$ 204

$B^d(0, r)$ 205

$\int_{\mathbb{R}^d}^* f(x)dx$ 213

$\int_{*\mathbb{R}^d} f(x)dx$ 213

$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$ 216

$\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$ 220

Vol (A) 220

$L^1(A)$ 231

$\|f\|_{L^1(A)} := \int\limits_A |f(x)|dx$ 231

$\operatorname{med}(g, f, h) := \inf\{\sup(f, g), h\}$ 247

$\Delta_\Phi(x_0)$ 262

d_Φ 264

$L^p(\Omega)$ 271

$\|f\|_{L^p(\Omega)} := (\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ 271

$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} f(x)$ 272

$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} f(x)$ 272

$L^\infty(\Omega)$ 272

$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$ 272

$f_n \xrightarrow{L^\infty} f$ 278

$f_n \xrightarrow{L^p} f$ 278

f_h 282

$\Subset$ 282

$C_0^k(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) : \operatorname{supp} f \Subset \Omega\}$ 287

$L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 294

$D_\alpha f$ 295

$W^{k,p}(\Omega)$ 295

$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := (\sum\limits_{|\alpha|\le k} \int\limits_\Omega |D_\alpha f|^p)^{\frac{1}{p}}$ 295

$\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha|\le k} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |D_\alpha f(x)|$ 295

$H^{k,p}(\Omega)$ 298

$H_0^{k,p}(\Omega)$ 298

$(\cdot,\cdot)$ 317

$(f,g)_{W^{k,2}(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha|\le k} \int\limits_\Omega D_\alpha f(x) \cdot D_\alpha g(x) dx$ 318

$(f,g)_{L^2(\Omega,\mathbb{C})} := \int\limits_\Omega f(x)\overline{g(x)} dx$ 318

$x_n \rightharpoonup x$ 322

$\mathrm{cap}_\Omega(K) := \inf\{\int_\Omega |Df|^2 : f \in H_0^{1,2}(\Omega), f \geq 1 \text{ on } K\}$ 344

cap_Ω 344

$[H]_f$ 360

$\Delta_i^h f(x) := \dfrac{f(x+he^i)-f(x)}{h}$ 368

■あ行

アルキメデスの螺旋 169
アルツェラ・アスコリ(Arzelà-Ascoli)の定理 66, 68, 114, 393
安定 353
イェンセン(Jensen)の不等式 253
位相 114
位相空間 114
位相空間の連続写像 116
1の分割(partition of unity) 289
一様収束 56, 57, 66, 95
一様楕円型 374
一様楕円性 385
一様有界 66
一様連続 66, 94
陰関数定理 160, 162, 165
運動エネルギー 352, 356, 359
運動方程式 359
エゴロフ(Egorov)の定理 254, 257, 292
エネルギー保存定理 353
L^∞-収束 278
$L^p(\Omega)$ における三角不等式 275
L^p 空間 271
L^p-収束 278
円柱座標 268
オイラー・ラグランジュ(Euler-Lagrange)方程式 346, 349, 353, 354, 359, 360

■か行

開球体 99
開近傍 100, 115
開区間 3
開集合 100, 114
外測度，内測度 220
階段関数 74, 194
階段関数の積分 194
回転 150
回転対称な関数 268
回転体の体積 207
回転トーラスの体積 207
解の正則性 377
開被覆 107
外力 358
ガウス分布 148
可換図式 162
各点収束 55, 56
確率測度 256
可算 227
可算加法性 256
下積分 213
可積分集合 220
可測 248, 256, 257
可測関数 248
可測集合 250
割線 169
カバリエリ(Cavalieri)の原理 205, 206
下半連続 184, 186, 335, 337, 338
下半連続性の点列収束による判定条件 185
下包関数 186
関数行列式 149

完全正規直交系　*324*
カントール(Cantor)集合　*227*
カントールの対角線論法　*67*
完備　*3, 54, 93, 107, 317*
完備性　*4*
ガンマ関数　*244*
逆関数定理　*162*
キャパシティ　*343*
求長可能　*175*
求長可能曲線　*171–173*
球の体積　*205*
共役な調和関数　*330*
境界における正則性　*379*
狭義極小値(極大値)　*37*
狭義単調増加(減少)　*9, 29*
強最大値原理　*394*
強収束　*278, 322*
極限値　*3*
極座標　*163, 266, 362*
極小(極大)値　*37*
極小曲面方程式　*360*
曲線　*169*
極大値(極小値)　*141*
極値　*141*
許容関数　*74*
距離　*51, 91, 139*
距離から導かれた位相　*115*
距離空間　*91, 99, 101, 102, 107*
空間の極座標　*166, 267, 362*
区分的連続微分可能　*173*
グラフ　*169*
原始関数　*74*
弦の振動　*356*
弧　*174*
高階の弱微分　*295*
高階微分　*129*
勾配　*137, 361*
コーシー・リーマン(Cauchy-Riemann)微分方程式　*329*
コーシー列　*3, 51, 54, 58, 93, 107, 280*
弧長でパラメーター付けされている　*175*
弧長変数　*175, 352*
孤立特異点の除去可能性　*388*
コンパクト　*107, 112*
コンパクト写像　*114*
コンパクトな台　*187*

■さ行
最急勾配方向　*138*
最小値　*21, 111, 386*
最小値(最大値)　*37*
最小ポテンシャルエネルギー原理　*352*
最小列　*338, 400*
最大値　*21, 111, 386*
最大値原理　*388, 392*
最短降下線　*350*
差分商　*368*
ザリスキ(Zariski)位相　*116*
三角不等式　*4, 53, 91, 318*
σ 代数　*255*
指数関数　*8*
自然数　*3*
実数　*3, 52*
実数の順序付け　*3*
質点の運動　*354*
弱解　*371, 373, 377, 382*
弱最大値原理　*386*
弱収束　*322, 335, 338, 339*
弱収束列　*326*
弱調和関数　*332*
弱微分　*294*
シュヴァルツ(Schwarz)の不等式　*318, 340*
集積点　*6*
重積分の変数変換公式　*259*
収束　*4, 53, 54*
収束する部分列を選ぶことで　*21*
収束半径　*60*
縮小性　*82*
条件付き極値問題　*163*

上積分　213
商の微分公式　27
上半連続　184
常微分方程式　80, 177, 351
常微分方程式系　177
上包関数　186
初期値問題　81
ジョルダン(Jordan)弧　174
ジョルダン弧の定理　176
正規直交系　324
積の微分公式　26
整数　3
正則曲線　170
正則性理論　334
正定値　145
正(負)定値　142
積分　75, 194, 216
積分可能　73
積分と微分の順序交換　244
積分の単調性　77
絶対収束　8, 59
絶対値　3
接ベクトル　169
全エネルギー　354
線形作用素　96
線形作用素のノルム　97
線形写像　96
線形楕円型作用素　374
線形楕円型微分作用素　385
全有界　107
双曲型　149
測度　256
測度空間　256
速度ベクトル場　330
ソボレフ(Sobolev)関数　299
ソボレフ空間　295, 318
ソボレフの埋め込み定理　303, 308, 310, 348, 367, 382, 393

■た行

台　187
大域的な正則性　379
体積　204, 220
対数関数　10
対称行列　145
対数螺旋　169
楕円型　148
楕円座標　364
楕円性　340
単位立方体　193
単関数　251
単調収束定理　280
単調増加(減少)　29
置換積分　76
中間値関数　247
中間値の定理　19
中線定理　318
調和拡張　388
調和関数　145, 329, 332, 388, 392
直交　138
定積分　79
ディニ(Dini)の定理　183, 196
テイラー(Taylor)級数　132
テイラー展開　132, 143
テイラーの公式　131
テイラーの定理　48
ディリクレ(Dirichlet)積分　361
ディリクレの原理　330, 332, 344
ディリクレ問題　330, 359, 381, 389, 390
点列コンパクト　107
等位線　135, 155
等位面　135
導関数　25
同相　259
同相写像　264
同等連続　66
特性関数　185, 204, 221
凸集合　104, 327, 335–338

■な行

内積　137
内部　102
長さ　170, 173, 204

波の伝播速度　*146*
滑らかな関数による L^p 関数の近似　*282*
2 階および高階微分　*32, 141*
2 階線形微分作用素　*148*
2 回微分可能　*32, 129*
2 回連続微分可能　*142*
ニュートン(Newton)の重力法則　*354*
ネイルの放物線　*170*
熱伝導　*148*
熱伝導率　*146*
熱方程式　*146*
熱方程式の基本解　*147*
ノルム　*53, 54, 97, 273, 275*
ノルム空間　*53, 54, 91, 105*

■は行

ハイネ・ボレル(Heine-Borel)の定理　*110*
ハウスドルフ(Hausdorff)空間　*115*
ハウスドルフの分離公理　*100*
発散　*150*
波動方程式　*147, 148, 358*
バナッハ(Banach)空間　*54, 58, 64, 65, 91, 98, 121, 278, 280, 298, 317*
バナッハ・サックス(Banach-Saks)の定理　*325*
バナッハ・サックスの補題　*325, 337*
バナッハの不動点定理　*54, 81, 157*
ハミルトン(Hamilton)の原理　*352, 356*
パラメーターのついた積分　*243*
半正(負)定値　*142*
半連続関数のコンパクト集合上の積分　*203*
半連続関数の積分　*196*
非可算　*227*
ピカール・リンデレーフ(Picard-Lindelöf)の定理　*81*
非正則曲線　*170*
微分可能　*25, 27, 121*
微分積分学の基本定理　*79*
微分同相　*259, 360*
ヒルベルト(Hilbert)空間　*317, 318, 399*
ヒルベルト空間上の有界線形汎関数　*320*
ヒルベルト空間の閉部分空間　*319*
ファトウ(Fatou)の補題　*239*
フェルマー(Fermat)の原理　*349*
複素数　*3*
不定値　*142*
負定値　*145*
不動点　*51, 54, 82, 157*
フビニ(Fubini)の定理　*198, 204, 232*
部分集合　*3*
部分積分　*76, 368*
閉　*54, 115*
閉球体　*99*
平均値の定理　*39, 52, 61, 77*
閉区間　*3*
平衡状態　*330, 353, 354, 358*
閉ジョルダン弧　*175*
閉包　*102*
べき級数　*59, 60*
ベクトル空間　*12*
ベクトル場　*150*
ヘッセ行列　*140, 143*
ヘルダー(Hölder)の不等式　*274–276, 318*
ヘルダー連続　*19*
変数変換　*174, 360*
偏微分　*127*
偏微分方程式　*148*
変分原理　*352*
変分問題　*348, 349*
ポアソン(Poisson)方程式の解の勾配の評価　*391*
ポアソン方程式の弱解　*333*
ポアンカレ(Poincaré)の不等式　*308, 333, 400*
方向微分　*137*
放物型　*149*

放物面　*136*
ホップ(Hopf)の境界点補題　*395*
ポテンシャルエネルギー　*352, 356, 358*
ほとんどいたるところ　*229, 231*
ほとんどいたるところ各点収束　*278*
ほとんど一様に収束　*255*
ボルツァーノ・ワイエルシュトラス(Bolzano-Weierstraß)の定理　*5, 6, 20, 21, 111*
本質的上限，本質的下限　*272*

■ま行
膜　*359*
交わる角度　*176*
密度関数　*264*
ミンコフスキー(Minkowski)の不等式　*275*
向き付きの弧　*174*
向きを逆にする　*174*
向きを保つ　*174*
面積　*79, 204, 358*
面積汎関数　*359*

■や行
ヤコビアン　*149*
ヤコビ行列　*149*
ヤング(Young)の不等式　*274*
優解　*387*
有界　*107*
有界線形写像　*96*
有界線形汎関　*333*
有界調和関数　*392*
有界列　*5*
優調和　*387*
ユークリッド距離　*93*
ユークリッドノルム　*92*

■ら行
ラグランジュ(Lagrange)の未定係数法　*163*
螺旋　*169*
ラプラス(Laplace)作用素　*145, 361, 374, 379, 394, 400*
ラプラス作用素の固有値問題　*399*
ラプラス作用素の変数変換公式　*362*
ラプラス方程式　*329, 361, 389*
ラプラス方程式の基本解　*146*
ラプラス方程式の弱解　*332*
リウヴィル(Liouville)の定理　*392*
リース(Riesz)の表現定理　*320*
立方体　*193*
リプシッツ(Lipschitz)連続　*19, 43, 81*
リーマン(Riemann)積分　*73, 75, 223*
リーマン積分論　*252*
ルジャンドル(Legendre)多項式　*364*
ルベーグ(Lebesgue)積分　*216*
ルベーグ積分可能　*216*
ルベーグ積分論　*252*
ルベーグ測度　*220*
ルベーグ点　*287*
ルベーグの定理　*240*
ルベーグの優収束定理　*240, 243, 250, 254, 264*
零関数　*226, 272*
零集合　*226, 229*
劣解　*387*
劣調和　*387*
レビ(Levi)の単調収束定理　*236*
レリッヒ・コンドラコフ(Rellich-Kondrachov)のコンパクト性定理　*311*
レリッヒのコンパクト性定理　*311, 331, 400, 402, 405*
連結　*105*
連鎖律　*28*
連続　*16, 18, 57, 94, 184*
連続双線形写像　*129*
連続体力学　*356*
連続微分可能　*60, 126*
ロル(Rolle)の定理　*38*

■わ行
ワイエルシュトラス(Weierstraß)の定理　*59*

訳者あとがき

軽く薄い本が好まれる最近の風潮からすれば，本書は決してスリムとは言えない．世の中の流れに逆流しているように見えるかもしれない．しかし，目次を一望すれば,「よくこのページ数に，これだけの内容を収めた」と驚かされるだろう．大学1年で学ぶ1変数の微分から始まって，大学4年までに学び終える高度な解析学のかなりの部分が，この1冊の本に見事にまとめられている．本書で扱われている微分積分学，位相空間論，ルベーグ積分論，偏微分方程式論の基礎(関数空間，変分原理，方程式の弱解，解の正則性理論等)は，本来ならそれぞれが独立に，優に300ページ程度の本になる内容である．幾何学と解析学の接点である，幾何解析学という分野における第一人者 Jost 教授ならではと思わせる．

これだけの内容が一まとまりになっている最大の利点は，もちろん見とおしの良さにある．すべての数学の基礎となる位相空間論と測度論は，動機が見えにくく，一方で精密な議論を要するために，概念の「実在感」が捉えにくい．本書では，偏微分方程式論の基本的手法の習熟という目標を掲げ，位相空間論と測度論を学ぶ動機を明快に与えている．さらに，物理的な例を含む具体例と，理解をより深いものするための反例を数多く挙げて，幾何学的イメージに訴えることにより「実在感」をもたらすような工夫がなされている．大学の数学を学ぶときに，抽象的概念に振り回され，論理は追えても分かった気持ちになれないと感じてきた読者は，本書を読むことによって，それらが有機的な繋がりを持って見えてくることに喜びを感じることができるのではないだろうか．

翻訳をするに当たって，原書にある誤植と明らかな間違いは気がつく限り

訂正したが，見逃しているものもあるかもしれない(特に，定理や補題を引用する際の番号の間違い)．また，翻訳の過程で誤りの生じた個所があるとすれば，それはもちろん翻訳者の責任である．

最後になったが，本書の翻訳を勧めて下さった東京都立大学の大仁田義裕氏，また数々の有益な助言と誤りの指摘をしていただいた東北大学の井関裕靖氏，長澤壮之氏，中島徹氏には心からの感謝を申し上げる．また，翻訳の完成まで，シュプリンガー・フェアラーク東京のスタッフには大変お世話になったことを申し添えておきたい．

2000 年 9 月

小谷元子

追記：初刷にあったミスプリント・誤りをご指摘くださった東京理科大学の立川篤氏に感謝する．(2002 年 7 月 23 日)

原著の初版から第 2 版への改訂に伴い，追加・削除された定理などは以下の通りである．また，このほか，以下の変更にしたがって番号が変化した数式や定理などがある．

3 章：初版の定理 3.11 が第 2 版では系 3.7 となる．系 3.8 と定理 3.13 が追加.
7 章：補題 7.21 が追加.
16 章：系 16.9 が追加.
17 章：定義 17.16〜17.20，補題 17.21 が追加.
19 章：初版の補題 19.13，定義 19.14 は，第 2 版ではそれぞれ補題 19.19，定義 19.20 に移る．補題 19.15，定義 19.17，系 19.18，定理 19.24 が追加.
20 章：定理 20.7 の記述が一部変更されている．初版の記述は

$f, v \in L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ とする．このとき $v = D_i f$

$$\Leftrightarrow \exists\,(f_n) \subset C^\infty(\Omega) : f_n \to f, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} f_n \to v \quad (L^p(\Omega)\ \text{で}).$$

である．この結果は正しいが初版の証明($\Longrightarrow$)には不備があった．第 2 版では証明は変えずに「条件を加える」という形で修正をほどこしている．以下は初版訳出の際に訳者が脚注において補足したものである．

> Ω 全体で $v_h = D_i(f_h)$ でないので $v_h \to v$ からただちに定理の主張は従わない．正確には $\Omega_n = \{x \in \partial\Omega : |x| < n,\ d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}\}$ に付随した $\operatorname{supp}\varphi_n \subset \Omega_{n+1}\backslash\bar{\Omega}_{n-1}$ となる 1 の分割 $\{\varphi_n\}$ を考え $\sum_n (f\varphi_n)_h$ で近似する必要がある．N. G. Meyers & J. Serrin, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **51** (1964)参照.

第 2 版では，定理 20.15 に先だって $d = 1$ の場合のソボレフ空間の取り扱いが加わっている(p.302〜p.303).

著　者
Jürgen Jost
Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences
Inselstr. 22-26
D-04103 Leipzig
Germany

訳　者
小谷　元子（こたに　もとこ）
1960年1月1日生まれ
1983年東京大学理学部数学科卒
1990年理学博士（東京都立大学）
東北大学大学院理学研究科数学専攻教授
専門分野：微分幾何学・大域解析学

ポストモダン解析学　　定価（本体 3,800 円+税）

発　行	2000年10月13日　初　　版 2008年　5月　6日　初版5刷
著　者	J. ヨスト
訳　者	小谷 元子
発行者	深田 良治
発行所	シュプリンガー・ジャパン株式会社 〒102-0073　東京都千代田区九段北1丁目11番11号 第2フナトビル TEL (03) 6831-7005 (営業直通)
印刷所	平河工業社

<検印省略>許可なしに転載，複製することを禁じます．落丁本，乱丁本はお取り替えします．

ISBN 978-4-431-70871-1　C3041　　http://www.springer.jp